TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO®
CAMPUS CERRO AZUL

Guía
Para Curso
PROPEDÉUTICO
2023

EDUCACION DESARROLLO
CALIDAD

SUBDIRECCIÓN ACADÉMICA

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

CURSO DE MATEMÁTICAS

Carretera Tuxpan-Tampico Km. 60, Cerro Azul, Ver.
C.P. 92519, Apartado Postal No. 118
Tels. +52(785) 85-89-100 Ext. 3201

TEMAS

1.-	**LEYES FUNDAMENTALES DE LA ARITMETICA**	*6*
1.1.	Leyes de los signos	*6*
1.1.1	Suma y resta de números con un mismo y con diferente signo	*6*
1.1.2	Multiplicación y división.	*6*
1.1.3	Operaciones con paréntesis	*7*
1.1.4	Operaciones con fracciones	*8*
1.2.	Mínimo común múltiplo (m.c.m.)	*10*
1.2.1.	Calculo del m.c.m.	*10*
1.2.2.	Propiedades básicas	*10*
1.3.	Máximo Común divisor (m.c.d.)	*11*
1.4.	Suma de fracciones	*12*
1.5.	Resta de fracciones	*13*
1.6.	Producto de fracciones	*14*
1.7.	Cociente de fracciones	*14*
1.8.	Leyes de los exponentes	*15*
1.9.	Leyes de los radicales.	*18*
1.10.	Leyes de los logaritmos base 10.	*21*
1.11.	Términos semejantes	*26*
1.11.1.	Reducción de dos términos semejantes de distinto signo	*27*
1.11.2.	Reducción de más de dos términos semejantes de distinto signo	*28*
2.-	**ALGEBRA ELEMENTAL**	*29*
2.1.	Constantes	*29*
2.2.	Variables	*29*
2.2.1.	La parte literal	*29*
2.2.2.	Expresión algebraica	*30*
2.2.3.	Coeficientes	*30*
2.2.4.	Exponentes	*30*
2.2.5.	Término	*30*
2.3.-	Monomios	*32*
2.4.-	Binomios	*35*
2.5.-	Trinomios	*36*
2.6.-	Polinomios	*37*
2.7.-	Operaciones con polinomios	*38*
2.7.1	Suma de monomios.	*39*
2.7.2	Resta de monomios	*39*
2.7.3	Multiplicación de monomios	*39*
2.7.4	División de monomios	*40*
2.7.5	Adición de polinomios	*41*
2.7.6	Resta de polinomios	*41*
2.7.7	Multiplicación de polinomios por monomios	*42*
2.7.8	División de un polinomio entre un monomio	*43*
2.7.9	Multiplicación de polinomios por polinomios	*44*
2.7.10	División de un polinomio entre otro polinomio	*45*
3.-	**PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACION DE POLINOMIOS**	*46*
3.1.-	Desarrollo de un binomio $(a+b)^2$, $(a-b)^2$	*46*
3.2.-	Producto de la suma por la diferencia de dos cantidades (a+b)(a-b)	*50*
3.3.-	Cociente de la diferencia de los cuadrados de dos cantidades entre la suma o la diferencia de las cantidades	*51*
3.4.-	Factorización de un polinomio que tiene un factor común	*52*
3.4.1.	Caso I factor común	*54*

3.4.1.1	Factor común monomio	*54*
3.4.1.2	Factor común polinomio	*55*
3.4.2	Factor común por agrupación de términos	*55*
3.5.-	Factorización de un trinomio cuadrado perfecto	*56*
3.6.-	Factorización y diferencia de cuadrados	*56*
3.7.-	Factorización de un trinomio x^2+bx+c	*57*
3.7.1	Trinomio cuadrado perfecto por adición y sustracción	*58*
3.7.1.1	Caso I: Trinomio de la forma x^2+bx+c	*59*
3.7.1.2	Caso II: suma o diferencia de potencias a la n	*59*
3.8.-	Factorización de un trinomio de la forma ax^2+bx+c	*60*
3.9.-	Factorización por el método de evaluación	*62*
4.-	**TRIGONOMETRIA Y SOLUCIÓN DE ECUACIONES ALGEBRAICAS**	*66*
4.1.-	Teorema de Pitágoras	*66*
4.2.-	Funciones trigonométricas	*68*
4.3.-	Ecuaciones de primer grado con una incógnita	*74*
4-4.-	Ecuaciones de segundo grado	*75*
4.5.-	Ecuaciones simultaneas con dos y tres incógnitas	*77*
5.-	**VECTORES Y ESCALARES**	*82*
5.1.	Sistema de unidades	*82*
5.2.	Conversión de unidades	*84*
5.2.1	Factores de conversión	*86*
5.3.	Definición de vectores	*88*
5.3.1	Propiedades de los vectores	*90*
5.4	Algebra de Vectores	*97*
5.4.1	Leyes del álgebra vectorial	*101*
5.5	Producto punto de dos vectores	*102*
5.6	Vectores en el espacio tridimensional	*104*
5.7.	Producto cruz de dos vectores (producto vectorial)	*106*

OBJETIVO

Proporcionar al estudiante las competencias básicas para facilitar el aprendizaje de las matemáticas del nivel superior a través del desarrollo y aplicación de los principios y teoremas fundamentales.

CARACTERIZACIÓN DEL CURSO

La propedéutica es el conjunto de saberes necesarios para preparar el estudio de una materia, ciencia o disciplina. Es la etapa previa a la metodología (conocimiento de los procedimientos y técnicas necesarios para investigar en un área científica). En la mayor parte de las instituciones educativas, los estudios de nivel superior y de posgrado (maestría y doctorado) incluyen un curso propedéutico.

Este curso propedéutico Involucra también los conceptos de preparación y adiestramiento, por tanto, podemos afirmar que la propedéutica es el estudio previo de los fundamentos o prolegómenos de lo que luego se enseñará con mayor extensión y profundidad, a manera de introducción en una disciplina. Aporta los conocimientos teóricos y prácticos necesarios, imprescindibles y básicos de una materia, que necesita el alumno para llegar a entenderla durante su estudio profundo y ejercerla después.

El Tecnológico Nacional de México Campus Cerro Azul, a través del departamento académico de Ciencias Básicas ha realizado una revisión y actualización de los contenidos del curso Propedéutico que se han venido impartiendo, reestructurando el programa general del curso e implementando una serie de ejercicios propuestos al final de cada unidad, con la finalidad de que el estudiante de nuevo ingreso reafirme los conocimientos adquiridos en el aula durante el desarrollo del curso.

1.- LEYES FUNDAMENTALES DE LA ARITMÉTICA

La **aritmética** es la rama de la matemática cuyo objeto de estudio son los números y las operaciones elementales: adición, resta, multiplicación y división.

Podemos referirnos a la aritmética elemental, enfocada a la enseñanza de la matemática básica; también al conjunto que reúne el cálculo aritmético y las operaciones matemáticas, específicamente, las cuatro operaciones básicas aplicadas ya sea a números (naturales, fracciones, etc.) como a entidades matemáticas más abstractas (matrices, operadores, etc.); también a la así llamada alta aritmética, mejor conocida como teoría de números.

1.1.- LEYES DE LOS SIGNOS

1.1.1. Suma y resta de números con un mismo y con diferente signo.

a) Cuando dos números positivos se suman el resultado es positivo.
b) Cuando dos números negativos se suman el resultado es negativo.
c) Cuando se suma un número positivo y un número negativo se toma el signo del número de mayor valor absoluto.

Ejemplo: $3+4=7$ $\quad -3+(-5)=-8$ $\quad -6+20=14$

$5+7=12$ $\quad -9+(-3)=-12$ $\quad 5+(-20)=-15$

1.1.2 Multiplicación y división

a) Cuando se multiplican o dividen dos números con el mismo signo, el resultado es positivo.
b) Cuando se multiplican o dividen dos números con diferente signo, el resultado es negativo.

Ejemplos:

$6*5=30$ $\quad 5(-7)=-35$

$12\div 6=2$ $\quad -3*5=-15$

$(-3)(-5)=15$ $\quad 20\div(-10)=-2$

$(-25)\div(-5)=5$ $\quad -36\div(6)=-6$

1.1.3 Operaciones con paréntesis

Las leyes de los signos se aplican en todas las operaciones de los números con signo. Observa cómo se presentan los números con sus signos y en medio el signo de la operación.

$$(+3) + (-3) = ?$$

Para resolver esta operación, es necesario eliminar los paréntesis de los números con signo. Se deben aplicar las reglas de los signos, como se muestra a continuación:

$$(+3) + (-3) = +3 -3 = 0$$

Los signos se tratan como si se estuvieran multiplicando.

$$(+3) - (-3) = +3 +3 = +6 = 6$$

Los signos iguales dan un producto positivo.

$$(-2) - (-4) = -2 \quad + 4 \quad = +2 \quad = 2$$

Se ejecuta la operación, poniendo el signo del número mayor.

Para que el procedimiento sea más claro, se pueden definir los pasos necesarios para resolver una operación con signos.

$$(-4) - (-8) = ?$$

Esta operación se lee "menos cuatro, menos, menos ocho".

Primero

Elimine los paréntesis aplicando las reglas de los signos.

Como el (-4) no tiene un signo antes del paréntesis se considera como (+); por lo tanto, de acuerdo con las leyes de los signos tenemos que + (-4) = -4.

Recuerde que signos iguales dan (+) y signos contrarios dan (-)

Segundo

Ejecute la operación sin paréntesis; en este caso, restar, poniendo el signo del número mayor.

$$(-4) - (-8) = - 4 + 8 = + 4 = 4$$

Ejemplos:

Operaciones con el signo del número mayor.

a) (-3) - (-6) = -3 + 6 = +3 = 3
b) (+3) - (-6) = +3 +6 = +9 = 9
c) (-4) - (-2) = -4 +2 = -2
d) (+7) - (+4) = +7 -4 = +3 = 3
e) (-6) + (+8) = -6 +8 = +2 = 2
f) (-6) - (-8) = -6 +8 = +2 = 2

Observe que para multiplicar no se usa el signo "x", con ello se evita confundirse con una "equis". Así, para indicar un producto, se usará un punto, un asterisco o un paréntesis entre las cantidades.

Las leyes de los signos para la multiplicación se explican en la siguiente tabla:

Signos a multiplicar	(+)	(-)
(+)	(+)	(-)
(-)	(-)	(+)

Al multiplicar números con signo diferente se obtienen números con signo negativo.

Ejemplo: $(2)(-4) = -8$

Al multiplicar un número negativo por otro número negativo, se tendrá como resultado un número positivo.

Ejemplo: $(-1)\,(-2) = 2$

Al multiplicar números con el mismo signo se obtendrán productos con signo positivo.

(-) (-) = (+)
(+) (+) = (+)

Ejemplos:

Producto de signos contrarios da un signo negativo.	Producto de signos iguales da un signo positivo.
$(+3)(-2) = (-6)$	$(+3)(+2) = (+6) = 6$
$(-3)(+2) = (-6)$	$(-3)(-2) = (+6) = 6$
$(+4)(-1) = (-4)$	$(+4)(+1) = (+4) = 4$
$(-12)(+2) = (-24)$	$(-12)(-2) = (+24) = 24$
$(-6)(+3) = (-18)$	$(-6)(-3) = (+18) = 18$
$(12)(0) = (0)$	$(-12)(0) = 0$

Las reglas que se obtuvieron para la multiplicación funcionan perfectamente en el caso de la división de los números con signo, como se observa a continuación:

La división de signos iguales da un signo positivo.	La división de signos diferentes da un signo negativo.
$\frac{(+)}{(+)} = (+)$ $\frac{(-)}{(-)} = (+)$	$\frac{(+)}{(-)} = (-)$ $\frac{(-)}{(+)} = (-)$
Ejemplos $\frac{(+2)}{(+1)} = (+2) = 2$ $\frac{(-2)}{(-1)} = (+2) = 2$	Ejemplos $\frac{(+2)}{(-1)} = (-2) = -2$ $\frac{(-2)}{(+1)} = (-2) = -2$

1.1.4.-Operaciones con fracciones

En matemáticas, una fracción es la expresión de una cantidad dividida entre otra.

1.2 MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (M.C.M.)

El mínimo común múltiplo de dos o más números naturales es el menor número natural que es múltiplo de todos ellos. Sólo se aplica con números naturales, es decir, no se usan decimales ni números negativos.

1.2.1 Cálculo del m.c.m.

Partiendo de dos o más números y por descomposición en factores primos, expresados como producto de factores primos, su **m.c.m.** será el resultado de multiplicar los factores comunes y no comunes elevados a la mayor potencia, por ejemplo el **m.c.m**. de 72 y 50 será:

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$72 = 2^3 * 3^2 \qquad\qquad 50 = 2^1 * 5^2$$

Tomando los factores comunes y no comunes con su mayor exponente, tenemos que:
Conociendo el máximo común divisor de dos números, se puede calcular el **m.c.m.** de ellos, que será el producto de ambos dividido entre su máximo común divisor.

Además, podemos utilizar otro método en caso de que hubiéramos calculado el máximo común divisor, en el cual se toman los factores comunes y no comunes con el mayor exponente y se multiplican: 2•2•3•5 = 60. El **m.c.m**. de 4, 5 y 6 es 60.

1.2.2 Propiedades básicas

a) Si el producto de dos números lo dividimos por su máximo común divisor **m.c.d.** el cociente es el mínimo común múltiplo. **m.c.m.**
A y B que descompuestos en números primos será

$$\boldsymbol{A = (p1 * p2) * p3 * p4 \quad \text{y} \quad B = (p1 * p2) * p5 * p6}$$

Donde sí **m.c.d.** es (p1•p2) y el producto de

$$\boldsymbol{A * B = (p1 * p2) * p3 * p4 * (p1 * p2) * p5 * p6}$$

Donde vemos que (p1•p2) esta repetido dos veces, luego si dividimos ese total por (p1•p2) tendremos el total menor que contiene a A y B siendo su **m.c.m.**

b) El **m.c.m**. de dos números, donde el menor divide al mayor, será el mayor. Es lógico ya que un múltiplo de ambos inferiores al mayor sería imposible ya que nosería múltiplo del mayor.

c) El **m.c.m**. de dos números primos es el total de su multiplicación. Esto es lógico ya que su máximo común divisor es 1.

d) El **m.c.m**. de dos números compuestos será igual al cociente entre su producto y el **M.C.D.** de ellos. Es evidente según la propiedad 1.

e) El máximo común divisor de varios números está incluido en el **m.c.m**.

1.3 MÁXIMO COMÚN DIVISOR (M.C.D.)

El máximo común divisor de dos o más números es el número, más grande posible, que permite dividir a esos números.

Para calcularlo. De los números que vayas a obtener el M.C.D., se colocan uno debajo del otro, se obtienen todos los divisores de los dos números y el máximo que se repita es el máximo común divisor (M.C.D.)

Ejemplo: Obtener el M.C.D. de 20 y 10:

20: 1, 2, 4, 5, 10 y 20
10: 1, 2, 5 y 10

Esto sirve para números pequeños. Pero para números grandes hay otra manera: la descomposición de factores.

Forma rápida de calcular el Máximo común Divisor (M.C.D.).

Ejemplo: Obtener el M. C. D. de 40 y 60:

1º *Tienes que saber las reglas de divisibilidad:* Hacer la descomposición de factores poniendo números primos. Por ejemplo, para 40, en la tabla de abajo, se va descomponiendo en 2, 2, 2 y 5.

40	2		60	2
20	2		30	2
10	2		15	3
5	5		5	5
1			1	

2º De los resultados, se eligen los números repetidos de menor exponente y se multiplican y ese es el M.C.D.

M.C.D. = 2x2x5= 20
M.C.D. 40 = 2x2x2x5 M.C.D. 60 = 2x2x3x5

1.4.- SUMA DE FRACCIONES

El **m.c.m.** se puede emplear para sumar fracciones de distinto denominador, tomando el **m.c.m.** de los denominadores de las fracciones, y convirtiéndolas en fracciones equivalentes que puedan ser sumadas. Véase el siguiente ejemplo:

$$\frac{1}{6}+\frac{4}{33}$$

Para poder efectuar la suma, primero se debe buscar el **m.c.m**. de los denominadores (6 y 33).

6	2		33	3
3	3		11	11
1			1	

6= 2 * 3 33 = 3*11

Luego el **m.c.m** 6 y 33 es: $\boldsymbol{m.c.m.} = 2*3*11 = 66$ que corresponde al número 66; ambas fracciones tendrán como denominador 66, ahora sólo hay que hallar a cada fracción su fracción equivalente, con denominador 66 y será posible la suma:

$$\frac{1}{6}+\frac{4}{33}=\frac{1}{6}*\frac{11}{11}+\frac{4}{33}*\frac{2}{2}=\frac{11}{66}+\frac{8}{66}=\frac{19}{66}$$

1.5.- RESTA DE FRACCIONES

Para restar fracciones, hay dos casos:

a) *Tienen el mismo denominador.* Se restan los numeradores y se deja el denominador común.

Ejemplo 1:

$$\frac{7}{12}-\frac{1}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

b) *Tienen denominador diferente.* Entonces, hay que amplificar las fracciones para que tengan el mismo denominador y luego sumar.

Fórmula típica para la resta:

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{bc}{bd}=\frac{ad-bc}{bd}$$

Observación: En realidad, no hace falta amplificar las fracciones de modo que el denominador resultante sea el producto de los denominadores de las fracciones iniciales. Basta con tomar el m.c.m. de los denominadores:

Fórmula para la resta

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a*\frac{mcm(b,d)}{b}-c*\frac{mcm(b,d)}{d}}{mcm(b,d)}$$

Ejemplo 2:

$$\frac{7}{8}-\frac{5}{12}=\frac{7*3-5*2}{24}=\frac{21-10}{24}=\frac{11}{24}$$

1.6 PRODUCTO DE FRACCIONES

Para multiplicar dos fracciones, basta multiplicar los numeradores por una parte y los denominadores por otra:

Fórmula para el producto

$$\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{a * c}{b * d}$$

Ejemplo

$$\frac{3}{4} * \frac{5}{2} = \frac{3 * 5}{4 * 2} = \frac{15}{8}$$

1.7 COCIENTE DE FRACCIONES

En el cociente de fracciones, el numerador de la fracción resultante es el producto del numerador de la fracción dividendo por el denominador de la fracción divisor, mientras que el denominador es igual al denominador de la fracción dividendo multiplicado por el numerador de la fracción divisor. Otra manera de imaginarlo es que dividir entre un número es lo mismo que multiplicar por el inverso de ese número, por lo que el cociente entre dos fracciones es igual al producto de la primera fracción por el inverso de la segunda:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} * \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Problemas Propuestos

1	$\frac{4}{5} + \frac{1}{6} =$
2	$\frac{3}{2} + \frac{5}{2} =$
3	$\frac{1}{-8} + \frac{3}{-10} =$
4	$\frac{1}{-2} - \frac{1}{-3} =$
5	$\frac{4}{5} - \frac{3}{6} =$

6	$\frac{7}{8} - \frac{3}{8} =$
7	$\frac{9}{5} * \frac{3}{4} =$
8	$\frac{1}{2} * \frac{1}{7} =$
9	$\frac{8}{6} = \frac{9}{3} =$
10	$\frac{1}{2} / \frac{3}{5} =$
11	$\frac{5}{8} / \frac{1}{3} =$
12	$\frac{2}{4} / \frac{3}{6} =$

1.8.- LEYES DE LOS EXPONENTES

Las leyes de los exponentes son el conjunto de reglas establecidas para resolver las operaciones matemáticas con potencias.

La potencia o potenciación consiste en la multiplicación de un número por sí mismo varias veces, y se representan gráficamente de la siguiente manera: xy.

El número que se ha de multiplicar por sí mismo es llamado base y el número de veces por el que se ha de multiplicar es llamado exponente, el cual es más pequeño y debe situarse a la derecha y arriba de la base.

Ejemplo

La operación de elevar un número a una potencia es un caso especial de multiplicación en el que los factores son todos iguales.

En ejemplos tales como: $\mathbf{4^2 = 4 * 4 = 16}$ y $\mathbf{5^3 = 5 * 5 * 5 = 125}$, el número **16** es la segunda potencia de 4 y el número **125** es la tercera potencia de **5**. La expresión $\mathbf{5^3}$ significa que tres 5 se multiplican entre sí.

La primera potencia de cualquier número es el número mismo. La potencia es el número de veces que el número mismo debe ser tomado como factor.

Ahora bien, en operaciones de suma, resta, multiplicación y división con una o varias potencias, ¿cómo proceder? Las leyes de los exponentes nos guían para resolver estas operaciones de la manera más simple posible.

Existen las siguientes leyes de los exponentes que deben aplicarse cuando el caso lo requiera:

1) Potencia cero

Todo número elevado a la 0 es igual a 1.

Ejemplo:

$x^0 = 1$
$5^0 = 1$
$37^0 = 1$

2) Potencia a la 1

Todo número elevado a 1 es igual a sí mismo.

Ejemplo:

$x^1 = x$
$30^1 = 30$
$45^1 = 45$

3) Multiplicación de potencias con la misma base

El producto de potencias con base idéntica es igual a una potencia de igual base, elevada a la suma de los exponentes.

Ejemplo: $2^4 \cdot 2^2 \cdot 2^4 = 2^{(4+2+2)} = 2^8$

4) División de potencias con la misma base

Cuando se dividen potencias con la misma base y exponentes diferentes, el cociente es igual a otra potencia con la misma base elevada a la suma de los exponentes.

Ejemplo: $4^4 : 4^2 = 4^{(4-2)} = 4^2$

5) Multiplicación de potencias con el mismo exponente

El producto de dos o más potencias diferentes con igual exponente es igual al producto de las bases elevado al mismo exponente.

Ejemplo: $3^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 = (3 \cdot 2 \cdot 3)^2 = 18^2$

6) División de potencias con el mismo exponente

El cociente entre dos potencias con base diferentes e igual exponente resulta en el cociente de las bases elevado al mismo exponente.

Ejemplo: $8^2 : 2^2 = (8 : 2)^2 = 4^2$

7) Potencia de una potencia

La potencia de una potencia resulta en otra potencia con la misma base elevada al producto de los exponentes.

Ejemplo: $(8^3)^3 = 8^{(3 \cdot 3)} = 8^9$

Problemas Propuestos

Calcular las operaciones entre las potencias que tienen diferentes bases:

1) $2^4 * 4^4 / 8^2$

Solución:

$2^4 * 4^4 / 8^2 = (2*4)^4 / 8^2 = 8^4 / 8^2$

$8^4 / 8^2 = 8^{(4-2)} = 8^2$

2) $(3^2)^3 * (2 * 6^5)^{-2} * (2^2)^3$

Solución:

$(3^2)^3 * (2 * 6^5)^{-2} * (2^2)^3$

$=3^6 * 2^{-2} * 2^{-10} * 2^6$

$=3^6 * 2^{(-2)+(-10)} * 2^6$

$=3^6 * 2^{-12} * 2^6$

$=3^6 * 2^{(-12)+(6)}$

$=3^6 * 2^6$

$= (3*2)^6$

$=6^6$

$=46.656$

3) $3^3 \cdot 3^4 \cdot 3 = 3^8$

4) $5^7 : 5^3 = 5^4$

5) $(5^3)^4 = 5^{12}$

6) $(5 \cdot 2 \cdot 3)^4 = 30^4$

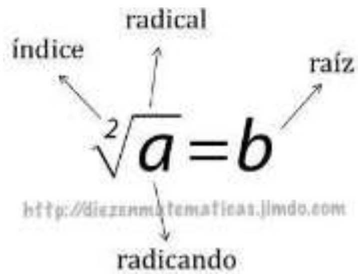
7) $(3^4)^4 = 3^{16}$

8) $[(5^3)^4]^2 = (5^{12})^2 = 5^{24}$

9) $(8^2)^3 = [(2^3)^2]^3 = (2^6)^3 = 2^{18}$

1.9.- LEYES DE LOS RADICALES

La operación inversa a realizar la potencia de una operación es la raíz de un número. Esta operación lo que nos indica es la cantidad de veces que hace falta multiplicar un número b para obtener un número a. El número que nos indica este número de veces (al cual llamaremos n) se conoce como índice de la raíz y el símbolo de esta operación se conoce como radical, todas estas partes las podemos observar en la imagen de abajo.



El menor índice que puede tomar el radical es el número 2 o raíz cuadrada como muchos lo conocemos. Esta raíz al igual que el exponente 1 no se escribe, pero se sabe que es una raíz cuadrada.

Ahora que conocemos el concepto de la raíz de número, pasemos a lo que nos concierne: las leyes de los radicales o raíces.

1.- Raíz "n" de una Potencia "n"

Al principio te comenté que la radicación o más bien la extracción de la raíz de una expresión o número es lo contrario a la potenciación o elevación de un elemento. De este concepto da lugar a la primera ley que dice: **Sí extraemos la raíz n a un número "x" elevado a la n potencia, entonces obtenemos como resultado a la base, ósea x.**

$$n\sqrt{x^n}$$

2.- El exponente fraccionario

Si tenemos una raíz n-ésima y queremos transformarla en una potencia, o viceversa, solo basta poner al radicando elevado a su potencia, la cual es dividida por el índice de la raíz.

El exponente del radicando es el numerador del exponente, y el índice de la raíz es el denominador.

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$$

Nota: Sí el índice 1 de la raíz existiera (la mínima raíz es la cuadrada o de índice 2), entonces tendríamos que:

$$\sqrt[1]{X^n} = x^{n/1} = x^n$$

La primera ley de hecho es un caso especial, cuando el índice y el exponente son los mismo (digamos índice a y potencia a) entonces tenemos que:

$$\sqrt[a]{x^a} = x^{a/a} = x^1 = x$$

3.- Raíz de una fracción

Si tenemos una fracción a/b como radicando, podemos simplificar la operación aplicando esta ley. **Si una raíz "n" opera a una fracción, entonces puede igualarse a la raíz "n" de a entre la raíz "n" de b:**

$$\sqrt{a/b} = \sqrt{a}/\sqrt{b}$$

Un ejemplo de esta ley sería el siguiente:

$$\sqrt{81/16} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{16}} = 9/4$$

4.- Raíz de una raíz

Así como existe potencia de una potencia, también existe raíz de una raíz y el concepto de ambos es el mismo. **Si tenemos una raíz n y aplicamos una operación de raíz de índice m sobre la primera, entonces podemos simplificar la operación al multiplicar los índices y crear una nueva raíz de índice n(m):**

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n.m]{x}$$

5.- Potencia de un producto

Si una raíz "n" se aplica a un producto, entonces podemos dividir esta raíz en raíces individuales una por cada uno de los términos. De forma inversa, si tenemos varias raíces, aunque sean diferentes radicandos, de igual índice podemos formar una sola raíz de índice "n" en donde el radicando será el resultado de multiplicar los radicandos de las raíces originales:

$$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}(\sqrt[n]{b})$$

Advertencias respecto a errores comunes:

$$\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$$
$$\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Simplificar un radical quiere decir eliminar factores del radical hasta que el radicando contenga sólo exponente igual o mayor que el índice del radical y el índice sea tan pequeño como sea posible.

Problemas Propuestos

1. . Extraer factores:

a) $\sqrt{2.\,3^2.\,5^5}$
b) $\sqrt[4]{2^7.\,3^{14}.\,5^4}$

2. . Introducir factores:

a) $2\sqrt{3}$
b) $2^2.\,3^3.\,\sqrt[4]{6}$

3. . Poner a común índice:

$\sqrt{2}$ $\quad\sqrt[3]{2^2.\,3^2}$ $\quad\sqrt[4]{2^2.\,3^4}$

4. . Realiza las sumas:

a) $2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + \sqrt{2}$
b) $3\sqrt[4]{5} - 2\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{5}$
c) $\sqrt{12} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{75}$
d) $\sqrt[4]{4} + \sqrt[6]{8} - \sqrt[12]{64}$
e) $2\sqrt{12} - 3\sqrt{75} + \sqrt{27}$
f) $\sqrt{24} - 5\sqrt{6} + \sqrt{486}$
g) $2\sqrt{5} + \sqrt{45} + \sqrt{180} - \sqrt{80}$

5. Realizar los productos:

a) $\sqrt{2}.\sqrt{6}$
b) $\sqrt{3}.\sqrt[3]{9}.\sqrt[4]{27}$
c) $\sqrt{12}.\sqrt[3]{36}$

6. Efectúa las divisiones de radicales:

a) $\dfrac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{16}}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}$

c) $\dfrac{\sqrt{256}}{\sqrt[3]{16}}$

7. Calcula: $\sqrt{a}.\sqrt[3]{a^2}.\sqrt[4]{a^3}/\sqrt[6]{a^4}$

8. Opera: $\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{\frac{1}{8}}}}$

1.10.- LEYES DE LOS LOGARITMOS BASE 10

Definición de Logaritmo: La logaritmación es una operación que consiste en, dada una base y el resultado de una elevación a potencia, hallar el exponente. Por ejemplo, ¿a qué potencia hay que elevar la base 8 para obtener el número 64? Como para obtener el número 64 hay que elevar 8 al cuadrado, se dice que 2 es el logaritmo de 64 en la base 8, y se escribe de la siguiente forma:

$$\text{Log}_8\ 64 = 2$$

Otro ejemplo: puesto que 5_3 = 125, se dice que 3 es el logaritmo de 125 en la base 5, y se escribe:

$$\log_5 125 = 3$$

En general, si b L = N, entonces L se llama logaritmo de N en la base b. Es decir, el logaritmo de un número N es el exponente L a que hay que elevar una base b para obtener el número N. En forma simbólica la definición se escribe como:

$$log_b N = L \ \ si\ y\ sólo\ si \ \ b^L = N \qquad (2.1)$$

Ejemplo: Cambie las igualdades siguientes a la forma logarítmica:

a) $4^2 = 16$
b) $15625 = 5^6$
c) 49 =7

Solución: Haciendo uso de la definición de logaritmo (2.1) se tiene:

a) $10g_{4}\ 16=2$
b) $\log_{5} 15625 = 6$
c) $\log_{49} 7=½ =0.5$

Ejemplo: Cambie las igualdades siguientes a la forma exponencial:

a) $\log_{10} 1000 = 3$
b) $\log_{81} 9 = 0.5$
c) $\log_{4} 1/64 = -3$

Solución: Usando la definición (2.1) se tiene:

a) $10_{3} = 1000$
b) $81_{0.5} = 9$
c) $4_{-3} = 1/64$

Leyes Fundamentales de los Logaritmos

A continuación, se enuncian y demuestran las leyes básicas de los logaritmos, las cuales son, simplemente, una reformulación de las leyes de los exponentes. Después de cada demostración se da un ejemplo numérico de la ley enunciada.

Teorema 1. El logaritmo de cero y de los números negativos no existe en el conjunto de los números reales.

Esto es: $\log_{b}$, N no existe, para todo $N \leq 0$

DEMOSTRACIÓN
La base de un sistema de logaritmos no puede ser negativa, porque si lo fuera sus potencias pares serían positivas y las impares serían negativas, y se tendría un conjunto de números alternados positivos y negativos; y por tanto, algunos números positivos no tendrían logaritmo.

Usando como base lo expuesto en el párrafo anterior, el logaritmo de un número negativo sería un número L tal que b^{L} sea un número negativo. Tal número no existe en el conjunto de los números reales; por tanto, el logaritmo de cero y el logaritmo de los números negativos no existe. En matemáticas superiores se demuestra que los logaritmos de los números negativos son números complejos.

Ejemplo: $\log_{5} -38$ no existe en el conjunto de los números reales

Teorema 2. El logaritmo de 1 es igual a cero.

Esto es: $\log_b 1=0$

DEMOSTRACIÓN

Se sabe que $b^0= 1$ para toda b elemento del conjunto de los números reales. Por (2.1) se tiene que:

$$\log_b 1 = 0$$

Ejemplos: $\log_7 1 = 0$
$\log_{14} 1 = 0$

Teorema 3. El logaritmo del número b en la base b es igual a 1.

Esto es: $\log_b b=1$

DEMOSTRACIÓN

Como b1 = b, entonces, por (2.1), se tiene que log b b = 1.

Ejemplos: $\log_9 9 = 1$
$\log_{25} 25= 1$

Teorema 4. El logaritmo del producto de dos números positivos es igual a la suma de los logaritmos de dichos números.

Esto es: $\log_b MN = \log_b M + \log_b N$

DEMOSTRACIÓN

Sea:

$$b^u = M \qquad (2.2)$$

$$b^v = N \qquad (2.3)$$

Por la definición de logaritmo, se puede escribir:

$$log_b M = u \qquad (2.4)$$

$$log_b N = v \qquad (2.5)$$

Multiplicando (2.2) y (2.3), $b^u\, b^v = MN$

Por una ley de los exponentes se tiene: $b^{u+v} = MN$

Por la definición (2.1), $\log_b MN = u + v$

Sustituyendo u y v de la expresión anterior por (2.4) y (2.5),

$\log_b MN = \log_b M + \log_b N$

Esta propiedad puede extenderse al caso del producto de tres o más números positivos.

Ejemplo: $\text{Log}_3 (10)(5) = \log_3 10 + \log_3 5$

Teorema 5. El logaritmo del cociente de dos números positivos es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.

Esto es: $\log_b M/N = \log_b M - \log_b N$

DEMOSTRACIÓN

Se divide (2.2) entre (2.3), $b^u/b^v = M/N$

Por una ley de los exponentes se tiene: $b^{u-v} = M/N$

Pasando la igualdad anterior a la forma logarítmica:

$\log_b M/N = u - v$

Sustituyendo u y v, $\text{Log}_b M/N = \log_b M - \log_b N$

Ejemplo: $\log_8 15/4 = \log_8 15 - \log_8 4$

Teorema 6. El logaritmo de un número positivo elevado a un exponente es igual al exponente multiplicado por el logaritmo del número.

Esto es: $\text{Log}_b M^n = n \log^b M$

DEMOSTRACIÓN

Se eleva (2.2) a la potencia n: $(b^u)n = Mn$

Por una ley de los exponentes, $b^{u\,n} = M^n$

La igualdad anterior es equivalente a: $\log_b M^n = u\,n$

Sustituyendo u, $\text{Log}_b M^n = n \log_b M$

Ejemplos: $\log^{10} 7^{1.5} = 1.5 \log_{10} 7$
$\log_6 {}^3\sqrt{25} = \log_6 25^{1/3} = (1/3) \log_6 25$

En el ejemplo anterior se utilizó la siguiente ley de los radicales: $^n\sqrt{a^m} = a^{m/n}$

Ejemplos: Sólo hay tres tipos de problemas de logaritmos. Estos son:

1) Dados la base y el logaritmo, hallar el argumento (potencia).

Ejemplo: $\log_3 x = -4$

Solución: La forma exponencial equivalente a la forma dada es:

$$3^{-4} = x$$
$$(1/3^4) = x$$
$$1/81 = x$$

2) Dado el argumento y el logaritmo, hallar la base.

Ejemplo: $\log_x 2 = 1/5$

Solución: Forma exponencial:

$$x^{1/5} = 2$$
$$(x^{1/5})^5 = 2^5$$
$$x = 2^5$$
$$x = 32$$

3) Dados el argumento y la base, hallar el logaritmo.

Ejemplo: $\log_2 7 = \dfrac{\log 7}{\log 2} = 2.8$

Problemas Propuestos

En los ejercicios 1 a 6 cambie las igualdades dadas a la forma logarítmica:

1. $5^0 = 1$
2. $15^1 = 15$
3. $10^{-2} = 0.01$
4. $9^5 = 59049$
5. $2^7 = 128$
6. $p^q = t$

En los ejercicios 7 a 12 cambie las igualdades dadas a la forma exponencial:

7. $log_8 4 = 2/3$
8. $log_7 1 = 0$
9. $log_2 0.25 = -2$
10. $log_{20} 400 = 2$
11. $log_{11} 1331 = 3$
12. $log_m t = 55$

1.11 TÉRMINOS SEMEJANTES

En una expresión algebraica se llaman términos semejantes a todos aquellos términos que tienen igual factor literal, es decir, a aquellos términos que tienen iguales letras (símbolos literales) e iguales exponentes.

Ejemplo:

- 6 a2b3 es término semejante con – 2 a2b3 porque ambos tienen el mismo factor literal (a2b3)
- 1/3 x5yz es término semejante con x5yz porque ambos tienen el mismo factor literal (x5yz)
- 0,3 a2c no es término semejante con 4 ac2 porque los exponentes no son iguales, están al revés.

Reducir términos semejantes significa sumar o restar los coeficientes numéricos en una expresión algebraica, que tengan el mismo factor literal. Para desarrollar un ejercicio de este tipo, se suman o restan los coeficientes numéricos y se conserva el factor literal.

Recordando cómo se suman los números enteros: Las reglas de suma se aplican únicamente a dos casos: números de igual signo y números con signo distinto.

Las reglas a memorizar son las siguientes:

a) Números de igual signo: Cuando dos números tienen igual signo se debe sumar y conservar el signo.

Ejemplos: – 3 + – 8 = – 11 (sumo y conservo el signo)

12 + 25 = 37 (sumo y conservo el signo)

– 7 + 12 = 5 (tener 12 es lo mismo que tener +12, por lo tanto, los números son de distinto signo y se deben restar):

12 – 7 = 5

b) Números con distinto signo: Cuando dos números tienen distinto signo se debe restar y conservar el signo del número que tiene mayor valor absoluto:

Ejemplos: $5 + -51 = -46$ (es negativo porque el 51 tiene mayor valor absoluto)

$-14 + 34 = 20$

Problemas Propuestos

1) $2x + 4x=$
2) $-2x - 4x=$
3) $x + 2x=$
4) $-x - 2x=$
5) $-x - x=$
6) $5x + x=$
7) $4x + 2x + x=$
8) $4x + 3x + 2x + x=$
9) $-4x - 3x - 2x - x=$

1.11.1 Reducción de dos términos semejantes de distinto signo

Regla: Se restan los coeficientes, poniendo delante de esta diferencia el signo del mayor y a continuación se escribe la parte literal.

Ejemplos:

- $2a -3a = -a$; $(2-3 = -1)$; signo mayor (-); literal (a) ; $-1a = -a$
- $18x -11x = 7x$; $(18-11= 7)$; signo mayor (+); literal (x) ; $7x$
- $-20ab+11ab= -9ab$; $(-20+11=-9)$; signo mayor (-) ; literal (ab) ; $-9ab$
- $-8y +13y = 5y$; $(-8+13 = 5)$; signo mayor (+) ; literal (y) ; $5y$

Problemas Propuestos

1. $8a -6a =$
2. $15ab -9ab =$
3. $-7b +7b =$
4. $40x*3y -51x*3y=$
5. $5/6mn -7/8mn =$
6. $-5mn +3/4mn =$

1.11.2 Reducción de más de dos términos semejantes de distinto signo

__Regla: Se reducen a un solo término todos los positivos, se reducen a un solo término todos los negativos y a los dos resultados obtenidos se restan poniendo delante de esta diferencia el signo del mayor y luego se escribe la parte literal.__

__Ejemplos:__

- $9a-3a+5a=11a=(9+5)a+(-3)a=14a-3a=(14-3)a=11a$
- $-8x+9x-x=0=(-8-1)x+(9)x=-9x+9x=(9-9)x=0x=0$
- $12mn-23mn-5mn=-16mn=(12)mn+(-23-5)mn=12mn-28mn=(12-28)mn=-16mn$
- $-5a^x+9a^x-35a^x=-31a^x=(-5-35)a^x+(9)a^x=-40a^x+9a^x=(-40+9)a^x=-31a^x$
  $-\frac{3}{5}m+\frac{1}{4}m-\frac{1}{2}m=-\frac{17}{20}m=\left(-\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\right)m+\left(\frac{1}{4}\right)m=-\frac{11}{10}m+\frac{1}{4}m=\left(-\frac{11}{10}+\frac{1}{4}\right)m=-\frac{17}{20}m$
- $-72ax+87ax-101ax+243ax=157ax$

__Problemas Propuestos__

1) $9a - 3a +5a=$
2) $-8x+9x-x=$
3) $12mn-23mn-5mn=$
4) $19m-10m+6m=$
5) $-x+19x-18x=$
6) $-11ab-15ab+26ab=$
7) $-5ax+9ax-35ax=$
8) $-24ax+2 -15ax+2+39ax+2=$

2.- ALGEBRA ELEMENTAL

Es la rama que pertenece a la matemática, la cual permite desarrollar y resolver problemas aritméticos a través de letras, símbolos y números, que a su vez simbolizan objetos, sujetos o grupos de elementos. Esta permite formular operaciones que contienen números desconocidos, llamados incógnitas y que hace posible el desarrollo de ecuaciones.

2.1.- CONSTANTES

En Álgebra, una constante es un número por sí solo, o algunas veces una letra como a, b o c que representan un número fijo.

Ejemplo: *En "x + 5 = 9", 5 y 9 son constantes*

2.2.- VARIABLES

Variable es una palabra que representa a aquello que varía o que está sujeto a algún tipo de cambio. Se trata de algo que se caracteriza por ser inestable, inconstante y mudable. En otras palabras, una variable es un símbolo que permite identificar a un elemento no especificado dentro de un determinado grupo. Este conjunto suele ser definido como el conjunto universal de la variable (universo de la variable, en otras ocasiones), y cada pieza incluida en él constituye un valor de la variable.

Una variable no es más que un símbolo que representa un valor numérico, pero no un valor concreto sino, en principio, cualquiera; es decir una variable es un símbolo que representa un elemento no especificado de un conjunto dado.

Por ejemplo: **x** es una variable del universo {**1**, **3**, **5**, **7**}. Por lo tanto,**x** puede ser igual a cualquiera de los recién mencionados valores.

2.2.1.- La parte literal

La constituyen las letras que haya en el término. Así en $5xy$, la parte literal es xy ; en $\left(\frac{3x^2y^4}{2ab}\right)$ la parte literal es $\left(\frac{x^2y^4}{ab}\right)$.

2.2.2 Expresión algebraica

Una expresión algebraica es una combinación de letras y números ligadas por los signos de las operaciones: adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.

Algunos ejemplos de expresiones algebraicas son:

a. $4x^2$
b. $3x$
c. $8m^3no^2$
d. p^2qr^5s
e. $x - y^2$
f. x2 + 2x + 1
g 4x2 + 8x + 2
h. 7mn + 4mn2 – 3m2n

2.2.3.- Coeficientes

Un coeficiente es el número que dice cuántas veces está multiplicada esa expresión.

Es decir, en el producto de dos factores, cualquiera de los factores es llamado coeficiente del otro factor. Así, en el producto $\boldsymbol{3a}$ el factor 3 es coeficiente del factor $\boldsymbol{a}$ e indica que el factor $\boldsymbol{a}$ se toma sumando tres veces, o sea $\boldsymbol{3a = a + a + a;}$ en el producto $\boldsymbol{5b,}$ el factor **5** es el coeficiente de $\boldsymbol{b}$ e indica que $\boldsymbol{5b = b + b + b + b + b}$.

2.2.4. Exponentes

El grado puede ser absoluto (la suma de los exponentes de su parte literal) o con relación a una letra.

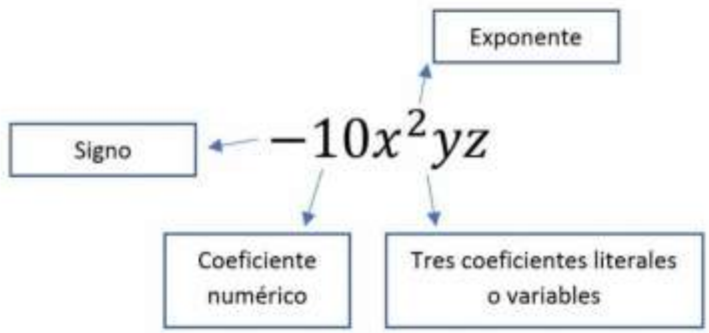
- Si un monomio carece de signo, equivale a positivo (+).
- Si un monomio carece de coeficiente, este equivale a uno.
- Si algún término carece de exponente, este es igual a uno.

<u>*Ejemplos de monomios:*</u> $ab^3c,\ \ 3x,\ \ 4x^2y^3z,\ \ -8xy^3$

2.2.5. Término

Un término algebraico, es la expresión que está formado por uno o más factores numéricos y/o literales.

Sus elementos son: signo de adición o sustracción, coeficiente numérico, variable y exponente del o los coeficientes literales.



Retroalimentación

Como vimos anteriormente una expresión algebraica puede estar formado por uno o varios términos separados por el signo (+) ó (-); además cada término está compuesto por su signo, coeficiente numérico, variable (s) y el exponente.

- En caso que no aparezca ningún signo, consideraremos que éste es (+).
- Si no aparece ningún coeficiente, de manera implícita se encuentra el 1 (uno).
- Si la variable no tiene ningún exponente especificado, de manera implícita tiene exponente 1 (uno).

Ejemplo:

$$3x^3y^4 + 7x^2 - xy^5$$

Expresión algebraica con 3 términos

Termino	Signo	Coeficiente	Variables	Exponentes
$3x^3y^4$	+	3	x, y	3, 4
$+7x^2$	+	7	x	2
$-xy^5$	-	1	x, y	1, 5

Problemas Propuestos

En las siguientes expresiones algebraicas, especificar el número de términos que la componen y elaborar una tabla para cada una de las expresiones, especificando el término, su signo, su coeficiente, sus variables y los exponentes de cada una de ellas. (Tomar como base el ejemplo anterior).

1. $3x^4 + 2x^3 - x^2 + 8x$
2. $5xy^3 + 10x$
3. $yz^4 + 2x^3 - xy^2 + 8xy - z$
4. $-3x^2y^2 - 2xy + x - 7y$
5. $\frac{1}{5}xy^2 - \frac{2}{7}y$
6. $3x^2y^2z - \frac{3}{7}xyz + 2xy - 5x$
7. $x^4y^3 + \frac{3}{8}x^2y^5 - xy^8$

2.3.- MONOMIOS

Un monomio es una expresión algebraica en la que se utilizan letras, números y signos de operaciones. Las únicas operaciones que aparecen entre las letras son el producto y la potencia de exponente natural.

Es decir que un monomio es una expresión de un solo término.

$$2x^2y^3z$$

Partes de un monomio

Los monomios constan de varias partes, el coeficiente, la parte literal y el grado.

Coeficiente

El coeficiente del monomio es el número que aparece multiplicando a las variables.

Ejemplos:

1. El coeficiente de $3x^3y^2z$ es 3
2. El coeficiente de $\frac{3}{4}xy^2z$ es $\frac{3}{4}$
3. El coeficiente de x^2z es 1

4. El coeficiente de $\frac{5}{3}$ es $\frac{5}{3}$

5. El coeficiente de x es 1

Parte literal

La parte literal o variable está constituida por las letras y sus exponentes.

Ejemplos:

1. La parte literal de $3x^3y^2z$ es x^3y^2z
2. La parte literal de y^2z es y^2z
3. La parte literal de 2abc es abc
4. El monomio 5 no tiene parte literal
5. La parte literal de *x* es *x*

Grado

El grado de un monomio es la suma de todos los exponentes de las letras o variables.

Ejemplos:

1. El grado de $2x^2y^3$ es 2 + 3 + 1 = 6
2. El grado de x^2z es 2 + 1 = 3
3. El grado de 2abc es 1 + 1 + 1 = 3
4. El grado del monomio 5 es 0 (se podría escribir como $5x^0$)
5. El grado del monomio *x* es 1

Monomios Semejantes

Se dice que son monomios semejantes cuanto su parte literal es decir las letras que conforman el monomio son las mismas.

Ejemplos:

1. $2x^2y^3z$ es semejante a $5x^2y^3z$
2. *5xz* es semejante a *xz*
3. $4a^3z^2$ es semejante a a^3z^2

Operaciones con Monomios

Suma de monomios

Para poder realizar sumas de dos o más monomios, estos tienen que ser monomios semejantes, es decir, monomios que tienen la misma parte literal o las mismas variables. La suma de monomios es otro monomio que tiene la misma parte literal y cuyo coeficiente es la suma de los coeficientes.

$$ax^n + bx^n = (a + b)x^n$$

Producto de un número por un monomio

El producto de un número por un monomio es otro monomio semejante cuyo coeficiente es el producto del coeficiente del monomio por el número.

$$5.\,(2x^2y^3z) = 10x^2y^3z$$

Multiplicación de monomios

La multiplicación de monomios da como resultado otro monomio, es decir se multiplican los coeficientes y cuya parte literal se obtiene multiplicando las potencias que tengan la misma base, es decir, sumando los exponentes.

$$(ax^n)(bx^m) = (ab)x^{n+m}$$

División de monomios

Sólo se pueden dividir monomios cuando el grado del dividendo es mayor o igual que el del divisor. La división de monomios da como resultado otro monomio, recordemos que cuando dos literales son iguales y se dividen lo único que pasa es que sus exponentes se restan.

$$\frac{(ax^n)}{(bx^m)} = (a/b)x^{n-m}$$

Potencia de un monomio

Para realizar la potencia de un monomio se eleva, cada elemento de este, al exponente que indique la potencia.

$$(ax^n)^m = a^m(x^n)^m = a^m x^{(n \cdot m)}$$

2.4.- BINOMIOS

Un binomio consta únicamente de dos términos, separados por un signo de más (+) o de menos (-). En otras palabras, es una expresión algebraica formada por la suma o la resta de dos monomios.

Operaciones sobre binomios

Factor común. El resultado de multiplicar un binomio *a+b* con un monomio *c* se obtiene aplicando la propiedad distributiva del producto respecto de la adición:

$c(a+b) = ca + cb$ o realizando la operación:

$$\begin{array}{lr} & a+b \\ \text{x} & c \\ \hline & ca+cb \end{array}$$

Suma por diferencia. El binomio $a^2 - b^2$ puede factorizarse como el producto de dos binomios:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$\begin{array}{lr} & a+b \\ \text{x} & a-b \\ \hline & -ab-b^2 \\ a^2+ab & \\ \hline a^2 & -b^2 \end{array}$$

Producto de dos binomios lineales. El producto de un par de binomios lineales $(ax+b)(cx+d)$ es:

$$(ax+b)(cx+d) = acx^2 + axd + bcx + bd = acx^2 + (ad+bc)x + bd$$

Potencia de un binomio. Un binomio elevado a la *n-ésima* potencia, $(a+b)^n$, puede desarrollarse utilizando la fórmula de teorema de Newton o, equivalentemente, con ayuda del triángulo de Pascal.

El ejemplo más sencillo es el cuadrado perfecto: $(p+q)^2$

Cuadrado de un binomio

Al elevar un binomio al cuadrado, se lo multiplica por sí mismo:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

La operación se efectúa del siguiente modo:

$$\begin{array}{r} (a+b) \\ \text{x} \quad \underline{(a+b)} \\ +ab+b^2 \\ \underline{a^2+ab \quad\quad} \\ a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

De aquí se puede derivar una regla para el cálculo directo: se suman los cuadrados de cada término con el doble producto de los mismos. Un trinomio de la forma $a^2 + 2ab + b^2$, se conoce como trinomio cuadrado perfecto. Cuando el segundo término es negativo:

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\begin{array}{r} (a-b) \\ \text{x} \quad \underline{(a-b)} \\ -ab+b^2 \\ \underline{a^2-ab \quad\quad} \\ a^2-2ab+b^2 \end{array}$$

2.5.-TRINOMIOS

Un trinomio es una expresión algebraica que consta de tres términos y/o monomios, por ejemplo:

$$3x^2 - 5x + 2 \quad y \quad 2x + 9y - 3z$$

Un **trinomio** es la suma indicada de tres monomios, es decir, un polinomio con tres términos que no puede simplificarse más

$$2x2 + 3x + 5$$

Trinomio al cuadrado

Un trinomio al cuadrado es igual al cuadrado del primero, más el cuadrado del segundo, más el cuadrado del tercero, más el doble del primero por el segundo, más el doble del primero por el tercero, más el doble del segundo por el tercero.

$$(a+b+c)2 = a2 + b2 + c2 + 2 \cdot a \cdot b + +2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$$

Ejemplo: $(x2 - x + 1)2 =$

$(x2)2 + (-x)2 + 12 + 2 \cdot x2 \cdot (-x) + 2x2 \cdot 1 + 2 \cdot (-x) \cdot 1$

$x4 + x2 + 1 - 2x3 + 2x2 - 2x =$

$x4 - 2x3 + 3x2 - 2x + 1$

Trinomio cuadrado perfecto

Un trinomio cuadrado perfecto es el desarrollo de un binomio al cuadrado.

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

$$\downarrow \quad t \quad \downarrow$$

$$x^2 \quad 2x2 \quad 2^2$$

Trinomio de segundo grado

Para descomponer en factores el trinomio de segundo grado P(x) = a x^2 + bx +c, se iguala a cero y se resuelve la ecuación de 2º grado. Si las soluciones a la ecuación son x_1 y x_2, el polinomio descompuesto será:

$$ax^2 + bx + c = a.(x - x_1).(x - x_2)$$

Ejemplo: $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4.6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = x_1 = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{4}{2} = 2$$

2.6.-POLINOMIOS

En matemáticas, un polinomio es una expresión algebraica constituida por una suma finita de productos entre variables y constantes, o bien una sola variable. Las variables pueden tener exponentes de valores definidos naturales incluido el cero y cuyo valor máximo se conocerá como grado del polinomio.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Donde:, *n* es un número natural y

Coeficientes: $a_n, a_{n-1}, \ldots\ldots, a_1, a_0$

Variable o indeterminada: *x*

Coeficiente principal: a_n

Término independiente: a_0

Ejemplo:

$$P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x - 3$$

Coeficientes: 2,3,5.-3

Variable o indeterminada: *x*

Coeficiente principal: 2

Término independiente: -3

Grado de un Polinomio

El grado de un polinomio P(x) es el mayor exponente al que se encuentra elevada la variable *x*. Según su grado los polinomios pueden ser de:

Tipo	EJEMPLO
Grado cero	P(x) = -2
Primer grado	P(x) = $3x + 2$
Segundo grado	P(x) = $2x^2 + 3x + 2$
Tercer grado	P(x) = $x^3 - 2x^2 + 3x + 2$
Cuarto grado	P(x) = $5x^4 + x^3 - 2x^2 + 3x + 2$
Quinto grado	P(x) = $2x^5 - 5x^4 + x^3 - 2x^2 + 3x + 2$

2.7.- OPERACIONES CON POLINOMIOS

Se pueden realizar operaciones como es la suma, resta, multiplicación y división algebraicas que pueden incluir monomios, binomios, trinomios y polinomios, o bien una conjugación de todos estos. A continuación, se presenta algunos ejemplos de estos.

2.7.1 Suma de monomios

1).- Sumar $5a, 6b\ y\ 8c.$

Lo escribimos unos a continuación de otros con sus propios signos, así:

$$5a = +5a, \quad 6b = +6b, \quad 8c = +8c$$

La suma será por lo tanto: $5a + 6b + 8c$

2.- Sumar $3a^2b, \; 4ab^2, \; a^2b, \; 7ab^2 \; y \; 6b^3$

Tendremos: $3a^2b + 4ab^2 + a^2b + 7ab^2 + 6b^3$

Reduciendo los términos semejantes, queda:

$$4a^2b + 11ab^2 + 6b^3$$

3.- Sumar $7a, -8b, -15a, 9b, -4c\ \ y\ \ 8.$

Cuando algún sumando es negativo, suele incluirse dentro de un paréntesis para indicar la suma, así:

$$7a + (-8b) + (-15a) + 9b + (-4c) + 8$$

La suma será: $7a - 8b - 15a + 9b - 4c + 8 = -8a + b - 4c + 8$

2.7.2 Resta de monomios

1).- De -4 *restar* $7.$
Así, $-4 - 7 = -11$

2).- Restar $4b$ *de* $2a$
Así: $2a - 4b$

3).- Restar $4a^2b$ *de* $-5a^2b.$
Así: $-5a^2b - 4a^2b = -9a^2b$

4).- $7x^3y^4$ *restar* $-8x^3y^4$
Así: $(7x^3y^4) - (-8x^3y^4) = 7x^3y^4 + 8x^3y^4 = 15x^3y^4$

2.7.3 Multiplicación de monomios

REGLA.- Se multiplican los coeficientes y a continuación de este producto se escriben las letras de los factores en orden alfabético, poniéndole a cada letra un exponente igual a la suma de los exponentes que tenga en los factores.

Ejemplos:

1.- Multiplicar $(2a^2)(3a^2)$

Así: $(2a^2)(3a^2) = 6a^4$

2.- Multiplicar $(-xy^2)(-5mx^4y^3)$

Así: $(-xy^2)(-5mx^4y^3)=(-xy^2) \times (-5mx^4y^3)=+5x^5my^5$

3.- Multiplicar $(3a^2b)(-4b^2x)$

Así: $(3a^2b)(-4b^2x)=-12a^2b^3x$

Problemas Propuestos

1. $(2x^2)(-3x)=$
2. $(-5x^3y)(xy^2)=$
3. $(a^2b^3)(3a^2x)=$
4. $(x^my^nc)(-x^my^nc^x)=$

2.7.4 División de Monomios

1. $\frac{x^5}{x^2}= x^{5-2}=x^3$
2. $x^{-3}= \frac{1}{x^3}$
3. $\frac{12x^4}{-3x} =-4x^{4-1}=-4x^3$
4. $\frac{-24m^5n^4}{-6mn^3}=4m^4n$
5. $\frac{36x^9}{4x^6}=9x^3$

6. $\frac{24m^3}{-6mn^4} = -4m^2n^{-4}$

7. $\frac{72m^5n^5p^2}{-12m^3p^7} = -6m^2n^5p^{-5} = \frac{-6m^2n^5}{p^5}$

Problemas Propuestos

1. $5s + 7s - 2s =$ 10s
2. $5xy + 7xy =$
3. $3mn - 4mb =$
4. $2x - 4x + 7x =$
5. $3mn + 4n - 5mn + 8m - 7m =$
6. $4x^3 y^2 + 4xy - 8xy - 9x^3y^2 =$
7. $\frac{3}{4}a - \frac{2}{3}b - \frac{1}{5}a + \frac{2}{3}a =$

2.7.5 Adición de Polinomios

1. $(4x + 3y + 8z) con\ (7x - 8y + 5z) =$
2. $(4x^3 + 5x - 7x^2 + 9)\text{con}\ (6x^3 - 4x + 3x^2 - 3) =$
3. $(5m^3 + 7n^2 - 8m + 4) con\ (8m^3 + 2m - 9) =$

Problemas Propuestos

1).- Sumar $a - b,\ \ 2a + 3b - c \quad y - 4a + 5b$

2).- Sumar $3m - 2n + 4,\ \ 6n + 4p - 5,\ \ 8n - 6 \quad y \quad m - n - 4p$

2.7.6 Resta de Polinomios

Cuando el sustraendo es un polinomio, hay que restar el minuendo cada uno de los términos del sustraendo, así que a continuación del minuendo escribiremos el sustraendo cambiándole signo a todos sus términos.

Ejemplo:

1).- De $4x - 3y + z$ restar $2x + 5z - 6$

Así: $4x - 3y + z - (2x + 5z - 6) = 4x - 3y + z - 2x - 5z + 6 = 2x - 3y - 4z + 6$

Problemas Propuestos

1.- De $a+b$ restar $a-b$

2.- $2x-3y$ restar $-x+2y$

3.- x^2+y^2-3xy restar $-y^2+3x^2-4xy$

4.- $5m^3-9n^3+6m^2n$ restar $14mn^2-21m^2n+5m^3-18$

Sustracción de polinomios

1. $(5x^{2)}-(-2x^2)=$
2. $(4x)-(4y)-(-3x)-(-3y)=$
3. $(5mn^2-14m^2n+17m^3)-(8mn^2-6m^2n-12m^3)=$
4. $(45x^3+26x^2-24x)-(36x^3+26x^2+35x)=$
5. $(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}x^2-\frac{2}{3}x^3)-(-\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{5}x^3+\frac{1}{4}x)=$

2.7.7 Multiplicación de polinomios por monomios

Sea el producto $(a+b)c$

Multiplicar $(a+b)c$ equivale a tomar la suma $(a+b)$ sumandola c veces; luego:

$$(a+b)c=(a+b)+(a+b)+(a+b)+(a+b)\text{.............}c\ veces$$

Ejemplos:

1.- Multiplicar $(3x^2-6x+7)\ (4ax^2)$

$$\begin{array}{r} 3x^2-6x+7 \\ 4ax^2 \\ \hline 12ax^4-24ax^3+28ax^2 \end{array}$$

2.-Multiplicar $(x^{n+1}y-3x^ay^2+2x^{a-1}y^3-x^{a-2}y^4)\ (-3xy^m)$

$$\begin{array}{r} (x^{n+1}y-3x^ay^2+2x^{a-1}y^3-x^{a-2}y^4) \\ (-3xy^m) \\ \hline (-3x^{n+2}y^{m+1}+9x^{a+1}y^{m+2}-6x^ay^{m+3}+3x^{a-1}y^{m+4}) \end{array}$$

Problemas Propuestos

Multiplicar:

1.- $(3x^3 - 2x^2)(-2\mathrm{x}) =$

2.- $(x^3 - 4x^2y + 6xy^2)(ax^3y) =$

3.- $(a^m - a^{m-1} + a^{m-2})(-2^a) =$

4.- $(x^2 - 4x + 3)(-2x) =$

Multiplicación de Polinomios por un Monomio

1. $5x^3 + 7x^2 - 9x$ $\boldsymbol{por}$ $4x^2 =$
2. $8m^3 + 7m^2 - 6m$ $\boldsymbol{por}$ $4m^2 - 5m =$
3. $(4x^3)(12xy^{5)} =$
4. $(5xyz^2 + 6xy)(4x^2y) =$
5. $(-4xyz - 3x^3y^2)(-3xy^3) =$
6. $(4x^3 + 34x^2 - 12x$-9) $(5x^2 - 8x) =$
7. $(-4xyz - 3x^3y^2)(-3xy^3) =$

2.7.8 División de un polinomio entre un monomio

1. $\frac{12x^5+32x^4-24x^3}{4x^2} =$
2. $\frac{60x^4-72x^3+24x^2}{6x^2} =$
3. $\frac{15c^3d^4-27c^4d^3+18c^4d^2}{3c^2} =$
4. $\frac{\frac{3}{4}x^4+\frac{3}{5}x^3-\frac{1}{2}x^2}{\frac{2}{3}x^2} =$

2.7.9 Multiplicación de polinomios por polinomios

Se multiplica todos los términos del multiplicando por cada uno de los términos del multiplicador, teniendo en cuenta la ley de los signos, y se reducen los términos semejantes.

Ejemplo:

1.- Multiplicar $(a-4)(3+a)$

Así:

$$\begin{array}{r} (a-4) \\ (a+3) \\ (a^2-4a) \\ \underline{(+3a-12)} \\ (a^2 \quad -a-12) \end{array}$$

Problemas Propuestos

Multiplicar:

1.- $(a+3)(a-1)=$

2.- $(a-3)(a+1)=$

3.- $(m-6)(m-5)=$

4.- $(7x-3)(4+2x)=$

5.- $(8n-9m)(4n+6m)=$

6.- $(-4y+5x)(-3x+2y)=$

7.- $(x^2+xy+y^2)(x-y)=$

8.- $(3x^3-a^3+2ax^2)(2a^2-x^2-3ax)=$

2.7.10 División de un polinomio entre otro polinomio

1. $x^2 + 2xy + y^2$ entre $x + y$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x + y \\
\hline
x + y & x^2 + 2xy + y^2 \\
 & -x^2 - xy \\
\hline
 & \cancel{xy} + \cancel{y^2} \\
 & -\cancel{xy} - \cancel{y^2} \\
\hline
 & 0 \quad 0
\end{array}
$$

2. $x^2 - 3x - 40$ entre $x + 5$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x - 8 \\
\hline
x + 5 & x^2 - 3x - 40 \\
 & -x^2 - 5x \\
\hline
 & -\cancel{8x} - \cancel{40} \\
 & \cancel{8x} + \cancel{40} \\
\hline
 & 0 \quad 0
\end{array}
$$

3.- PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACIÓN

Los productos notables son multiplicaciones que se presentan en repetidas ocasiones en el desarrollo del álgebra. El hecho de aprenderlos tiene como fin el ahorro de tiempo en las multiplicaciones y que sirvan como una introducción a la factorización. Recordemos entonces los productos notables más importantes.

1. **Binomio al cuadrado:** Cuadrado del primer término, más el doble producto del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo término.
2. **Producto de binomios conjugados**: El producto de dos binomios conjugados es igual a la diferencia de los cuadrados de los términos.
3. **Producto de binomios con un término común**. Cuadrado del término común, suma de los términos no comunes por el término común, producto de los términos no comunes.

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

Factorización: Se conoce como factorizar al proceso de reescribir un polinomio como un producto de otros polinomios. A los polinomios que se multiplican se les llama factores del polinomio original. En realidad, el proceso de factorizar puede generalizarse a cualquier expresión algebraica. Decimos que un polinomio es irreducible (no factorizable), o primo, si no se puede expresar como el producto de dos polinomios. Un polinomio, con coeficientes reales, es factorizable si se puede expresar como el producto de dos polinomios, cada uno de ellos de grado mayor o igual a cero.

La diferencia que existe entre PRODUCTO NOTABLE y FACTORIZACIÓN es que cada uno de ellos se resuelve por diferentes formas, por lo menos en producto notable el resultado se puede hallar por solo inspección y se reconocen fácilmente. En cambio, en factorización es una descomposición de un objeto en una lista de objetos más pequeños (factores) que al multiplicarlos resultará el original.

3.1.- DESARROLLO DE UN BINOMIO $(a+b)^2, (a-b)^2$

Características de los Binomios

Los Términos de un Binomio pueden ser e **dos diferentes modalidades**: Una **variable con una constante**, como el Binomio (x+5), ó **dos variables diferentes**, como el Binomio (x+y).

En los problemas algebraicos, los Binomios se encontrarán involucrados en una **serie de operaciones básicas** cuya solución se ha estandarizado. Dichas operaciones se llaman **Productos Notables** por lo mismo, porque se resuelven mediante la aplicación de una regla o procedimiento general. La ventaja es que **se deja de multiplicar término a término** para llegar al resultado, lo que es más tardado.

En los Productos Notables, los Binomios pueden estar elevados a un exponente o multiplicándose entre sí en diferentes casos.

Los Binomios y los Productos Notables

Los **Binomios** se encuentran en **cuatro Productos Notables** básicos: **Binomio al cuadrado**, **Producto de Binomios Conjugados**, **Producto de Binomios con un Término Común**, y **Cubo de un Binomio**.

Se explicarán a continuación cada uno de los productos Notables que contienen Binomios, con su procedimiento general:

Binomio al Cuadrado

El Cuadrado del Binomio es el **producto de un Binomio por sí mismo**. Es posible desarrollar esta operación, multiplicando término a término:

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x-y)^2 = (x-y)(x-y) = x^2 - xy - xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

O se puede aplicar la regla general, que reza:

"El cuadrado de un binomio es igual al Cuadrado del Primer Término, más el Doble producto de ambos términos, más el Cuadrado del Segundo Término".

Y por supuesto **se respetarán los signos que precedan a cada término**, afectándose así hasta llegar al resultado final, como en la segunda solución.

Un **binomio al cuadrado** es una **suma algebraica que se suma por sí misma**, es decir, si tenemos el binomio a + b, el cuadrado de ese binomio es (a + b) (a + b) y se expresa como $(a + b)^2$.

El producto de un binomio al cuadrado se llama trinomio cuadrado perfecto. Se le llama cuadrado perfecto, porque el resultado de su raíz cuadrada siempre es un binomio.

Como en toda multiplicación algebraica, el resultado se obtiene multiplicando cada uno de los términos del primer término, por los términos del segundo, y sumando los términos comunes:

Al elevar al cuadrado el binomio: $x+z$, la multiplicación se hace de la siguiente forma:

$$(x+z)^2 = (x+z)(x+z) = (x)(x)+(x)(z)+(z)(x)+(z)(z)= x^2+xz+xz+z^2 = x^2+2xz+z^2$$

Si el binomio es $x–z$, entonces la operación será:

$$(x–z)^2 = (x–z)(x–z) = (x)(x)+(x)(–z)+(–z)(x)+(z)(z)= x^2–xz–xz+z^2 = x^2–2xz+z^2$$

Aquí, es conveniente recordar algunos puntos importantes:

Todo número elevado al cuadrado, siempre da como resultado un número positivo:

$$(a)(a) = a^2; (–a)(–a)= a^2$$

Todo exponente elevado a una potencia, se multiplica por la potencia a la que se eleva. En este caso, todos los exponentes elevados al cuadrado, se multiplican por *2:*

$$(a^3)^2 = a^6; (–b^4)^2 = b^8$$

El resultado de un binomio al cuadrado, siempre es un trinomio cuadrado perfecto. A este tipo de operaciones se les llama productos notables. En los productos notables, el resultado se puede obtener por inspección, es decir, sin hacer todas las operaciones de la ecuación. En el caso del binomio al cuadrado, el resultado se obtiene con las siguientes reglas de la inspección:

1. Escribiremos el cuadrado del primer término.
2. Sumaremos el doble del primero por el segundo término.
3. Sumaremos el cuadrado del segundo término.

Si aplicamos estas reglas a los ejemplos que usamos arriba, tendremos: $(x+z)^2$

1. Escribiremos el cuadrado del primer término: x^2
2. Sumaremos el doble del primero por el segundo término: $2xz$
3. Sumaremos el cuadrado del segundo término: z^2.

   El resultado es: $x^2+2xz+z^2$

$(x–z)^2$

1. Escribiremos el cuadrado del primer término: x^2.
2. Sumaremos el doble del primero por el segundo término: $–2xz$.
3. Sumaremos el cuadrado del segundo término: z^2.

El resultado es: $x^2+(–2xz)+z^2 = x^2–2xz+z^2$

Ejemplos de binomios al cuadrado:

a.- $(4x^3 – 2y^2)^2$

El cuadrado del primer término: $(4x^3)^2 = 16x^6$
El doble producto del primero por el segundo: $2 [(4x^3)(–2y^2)] = –16x^3y^2$
El cuadrado del segundo término: $(2y^2)^2 = 4y^4$
$(4x^3 – 2y^2)^2 = 16x^6 –16x^3y^2+ 4y^4$

b.- $(5a^3x^4 – 3b^6y^2)^2$

El cuadrado del primer término: $(5a^3x^4)^2$
El doble producto del primero por el segundo: $2 [(5a^3x^4)(- 3b^6y^2)]$
El cuadrado del segundo término: $(– 3b^6y^2)^2$
$(5a^3x^4 – 3b^6y^2)^2 = 25a^6x^8 – 30a^3b^6x^4y^2+ 9b^{12}y^4$

c.- $(5a^3x^4 + 3b^6y^2)^2$

El cuadrado del primer término: $(5a^3x^4)^2$
El doble producto del primero por el segundo: $2 [(5a^3x^4)(3b^6y^2)]$
El cuadrado del segundo término: $(3b^6y^2)^2$
$(5a^3x^4 – 3b^6y^2)^2 = 25a^6x^8 + 30a^3b^6x^4y^2 + 9b^{12}y^4$

d.- $(–6mx – 4ny)^2$

El cuadrado del primer término: $(–6mx)^2$
El doble producto del primero por el segundo: $2 [(–6mx)(– 4ny)]$
El cuadrado del segundo término: $(– 4ny)^2$ $(–6mx – 4ny)^2 = 36m^2x^2 + 48mnxy + 16n^2y^2$

Problemas Propuestos

a. $(6mx + 4ny)^2 =$

b. $(4vt - 2ab)^2 =$

c. $(-3x^5 + 8)^2 =$

d. $(-3a^3b - 3ab^3)^2 =$

3.2.- PRODUCTO DE LA SUMA POR LA DIFERENCIA DE DOS CANTIDADES (a+b)(a-b)

Producto de Binomios Conjugados

Dos Binomios toman la característica de **Conjugados** cuando **difieren únicamente en el signo de uno de sus términos**.

$$(x+y)(x-y) = x^2 - xy + xy - y^2 = x^2 - y^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Se pueden ir multiplicando término a término, pero se llega a la conclusión de que el resultado tiene una estructura permanente, que se interpretará así:

"El producto de dos binomios conjugados es igual a la diferencia de los cuadrados de los términos"

Procedimiento: (a+b)(a-b)= al cuadrado del minuendo menos el cuadrado del sustraendo: $a^2 - b^2$

El minuendo y el sustraendo se identifican mejor en el factor que tiene una diferencia o resta (a-b).

Ejemplo: (a-x)(x+a)
= (a-x)(a+x)
= $a^2 - x^2$

En este caso la diferencia es (a-x)
El cuadrado del minuendo " a " es : a^2
Menos el cuadrado del sustraendo " x " es : $-x^2$
Nota: el segundo factor (x+a) se ordenó a (a+x)

Ejemplos

a.- (2a-1)(1+2a)
= (2ª-1)(2ª+1)
= $(2a)^2 - (1)^2$
= $4a^2 - 1$

b.- (1+3ax)(3ax+1)

= (1+3ax)(1+3ax)
= $(1)^2 + (3ax)^2$
= $1+ 9a^2x^2$

c.- (m-n)(m+n)
=(m-n)(m+n)
= $(m)^2 – (n)^2$

d.- $(x^2+a^2)(a^2-x^2)$
= $(x^2+a^2)(x^2-a^2)$
= $x^4- a^4$

Problemas Propuestos

a. (2a - 1)(1+ 2a) =
b. (3x + 2)(2 - 3x) =

3.3.- COCIENTE DE LA DIFERENCIA DE LOS CUADRADOS DE DOS CANTIDADES ENTRE LA SUMA O LA DIFERENCIA DE LAS CANTIDADES

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b$$

Procedimiento

La diferencia de los cuadrados de dos cantidades dividida por la suma de las cantidades es igual a la diferencia de las cantidades.

Ejemplos:

1.- $\frac{x^2-16}{x+4}$

a) La raíz cuadrada de x^2es x
b) La raíz cuadrada de 16 es 4
Entonces: $\frac{x^2-16}{x+4} = x - 4$

2.- $\frac{x^2-1}{x+1}$

= $(\frac{x^2}{x}) + (\frac{-1}{1})$ =x-1

Primer término del dividendo entre el primer término del divisor: x² / x = x
Segundo término del dividendo entre el segundo término del divisor: -1 / 1 = -1

3.- $\frac{1-x^2}{1-x}$

$$=\left(\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{-x^2}{-x}\right)=1+x$$

4.- $\frac{25-36x^4}{5-6x^2}$

$$=\left(\frac{25}{2}\right)+\left(\frac{-36x^4}{-6x^2}\right)=5+6x^2$$

Recuerda que (-) entre (-) da positivo (+) : -36/-6 = 6
(al dividir potencias, se copia la base y se restan los exponentes $\frac{x^4}{x^2}=x^{4-2}=x^2$

__Problemas Propuestos__

$\frac{36m^2-49n^2x^4}{6m-7nx^2}$ $\frac{x^2-4}{x+2}$

3.4.- FACTORIZACIÓN DE UN POLINOMIO QUE TIENE UN FACTOR COMÚN

Antes que todo, hay que decir que todo polinomio se puede factorizar utilizando números reales, si se consideran los números complejos. Existen métodos de factorización, para algunos casos especiales.

- Binomios

1. Diferencia de cuadrados
2. Suma o diferencia de cubos
3. Suma o diferencia de potencias impares iguales

- Trinomios

1. Trinomio cuadrado perfecto
2. Trinomio de la forma x^2+bx+c
3. Trinomio de la forma ax^2+bx+c

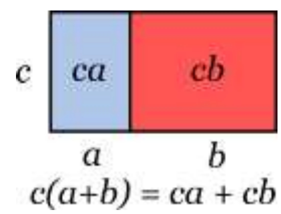
- Polinomios

Productos Notables

Se les llama así, a la multiplicación de expresiones algebraicas cuyo resultado se puede escribir mediante simple inspección, sin verificar la multiplicación que cumplen ciertas reglas fijas.

FACTOR COMÚN: El resultado de multiplicar un binomio *a*+*b* por un término *c* se obtiene aplicando la propiedad distributiva:

$c(a+b)=ca+cb$

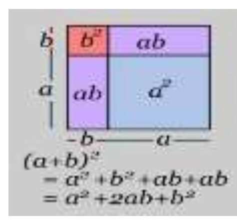


Ejemplo:

4x(3y+2)=(4x)(3y)+(4x)(2)=12xy+8x

BINOMIO AL CUADRADO O CUADRADO DE UN BINOMIO: Para elevar un binomio al cuadrado (es decir, multiplicarlo por sí mismo), se suman los cuadrados de cada término con el doble del producto de ellos. Así:

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$



Ejemplo:

$(2x+7y)^2=2x^2+2(2x)(7y)*(7y)^2=2x^2+14xy+49y^2$

Cuando el segundo término es negativo, la ecuación que se obtiene es:

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

Ejemplo:

$(2x\text{-}7y)^2=(2x)^2+2(2x)(-7y)+(-7y)^2=2x^2-14xy+49y^2$

Producto de dos binomios conjugados

Binomios conjugados: se diferencian sólo en el signo de la operación. Para su multiplicación basta elevar los monomios al cuadrado y restarlos (obviamente, un término conserva el signo negativo), con lo cual se obtiene una diferencia de cuadrados.

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

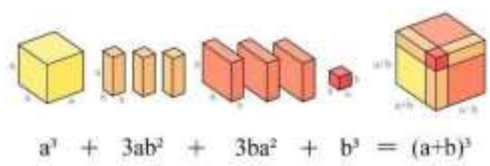
Ejemplo:

$(8x+3y)(8x-3y)=(8x)^2-(3y)^2=64x^2-9y^2$

Binomio al cubo: para calcular el cubo de un binomio se suman, sucesivamente:

- El cubo del primer término
- El triple producto del cuadrado del primero por el segundo.
- El triple producto del primero por el cuadrado del segundo.
- El cubo del segundo término.

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$



Ejemplo

$$(2x+4y)^3=(2x)^3+3(2x)^2(4y)+3(2x)(4y)^2+(4y)^3$$
$$= 8x^3 + 48x^2y + 96xy^2 + 64y^3$$

Si la operación del binomio implica resta, el resultado es:

- El cubo del primer término.
- **Menos** el triple producto del cuadrado del primero por el segundo.
- **Más** el triple producto del primero por el cuadrado del segundo.
- **Menos** el cubo del segundo término.

$(a-b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2-b^3$

Factorización de polinomios

La **factorización** es una expresión algebraica que mediante factores o divisores permiten simplificar en términos más simples para su manipulación.

3.4.1 Caso 1 Factor común

3.4.1.1 Factor común monomio

Un factor común monomio, es el **factor** que está **presente en cada término** delpolinomio. En el caso de los **coeficientes numéricos** el factor común **es el mayor divisor posible entre ellos** y el factor común literal está conformado por el o los elementos de la parte literal presentes en todos los términos con el menor exponente.

Para factorizar el polinomio, se escribe el factor común monomio multiplicado por el polinomio resultante de dividir cada término del polinomio original entre el factor común monomio.

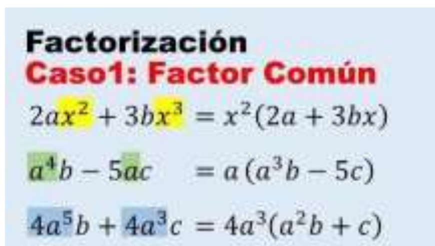
ab + ac + ad **=** a(b + c + d)

Ejemplo

1. $12a^4b^3 - 8a^3b^2 + 4a^2b = 4a^2b\,(3a^2b^2 - 2ab + 1)$

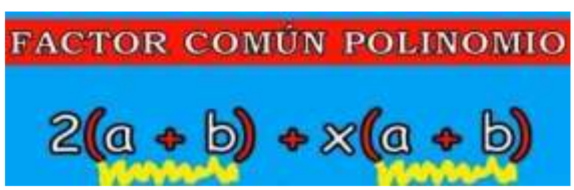
Para el caso del primer ejemplo, **a** es el factor común que se encuentra en cada uno de los términos.

Para el segundo ejemplo, 4 el múltiplo de todos los números presentes en el polinomio, las literales presentes son **ab** y el exponente más pequeño es **2** para el caso de **a** y **1** para el caso de **b**.



3.4.1.2 Factor común polinomio

Es el polinomio que aparece en cada término de la expresión, ahora el factor común resulta ser un polinomio.



3.4.2 Factor común agrupando términos

Se trata de agrupar términos de manera que entre cada grupo podamos obtener un factor común y de esta forma si es posible obtener a su vez un factor común polinomio.

Factorizar $ap + bp + aq + bq = a(p + q) + b(p + q) =$

$= (a + b)(p + q)$

3.5 FACTORIZACIÓN DE UN TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Un trinomio cuadrado perfecto es una expresión algebraica de la forma

$$a^2 + 2ab + b^2$$

Para determinar si un trinomio es cuadrado perfecto se debe:

1.- Identificar los dos términos que son cuadrados perfectos obteniéndoles su raíz cuadrada.
2.- El tercer término corresponde al doble producto de la raíz cuadrada de los dos términos del punto anterior.

Si se tiene al trinomio $a^2 + 2ab + b^2$

Se identifican los dos términos que son cuadrados perfectos

$$a^2 = (a)^2$$
$$b^2 = (b)^2$$

3.- El tercer término corresponde al doble producto de las raíces de los dos anteriores

$$2ab$$

Por lo tanto, $a^2 + 2ab + b^2$ es un trinomio cuadrado perfecto.

3.6. FACTORIZACIÓN Y DIFERENCIA DE CUADRADOS

Cada polinomio que sea una diferencia de cuadrado se puede factorizar al aplicar la siguiente formula:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Ejemplo: $49x^2 - 16y^2 = (7x + 4y)(7x - 4y)$

Problemas Propuestos

Desarrolla

1. $x(3 + y) =$
2. $z(x + y) =$
3. $(2x + y)(s + t) =$
4. $(a + b)(x + y)=$
5. $z(x + s) =$

6. $(5x + 2y)^2 =$
7. $(8x - 3a)^2 =$
8. $(3x + 5y)(3x - 5y) =$
9. $(8a + 3b)^3 =$
10. $(3t - 5s)^3 =$

Factoriza

11. $3x^2 - 3 =$
12. $8ax + 4x =$
13. $2ax - 2x - ay + y =$
14. $am + bn + an + bn =$
15. $3x^2 - 3bx + xy - by =$
16. $9x^2 + 12xy + 4y^2 =$
17. $49x^2 + 42xy + 9y^2 =$
18. $16x^2 - 24xy + 9y^2 =$
19. $16x^2 - 25y^2 =$
20. $4x^2 - 9z^2 =$

3.7 FACTORIZACIÓN DE UN TRINOMIO x^2+bx+c

Existen algunos trinomios que no son cuadrados perfectos y que también son factorizables, sólo que mediante un procedimiento diferente.

A continuación, se presentan ejemplos de trinomios del tipo $\mathbf{x^2 + bx + c}$

1. $x^2 + 5x + 6$
2. $x^2 - 11x + 24$
3. $x^2 + x - 20$
4. $x^2 - 6x - 27$

Como se puede observar, estos trinomios constan de un término cuadrático, otro de primer grado y otro constante, llamado término independiente, por lo que son trinomios de una sola variable con coeficientes constantes.

3.7.1 Trinomio cuadrado perfecto por adición y sustracción.

Este es uno de los casos especiales de factorización. Consiste en convertir un trinomio en un trinomio cuadrado perfecto adicionándole y sustrayéndole un término. El primer y tercer término tienen que ser cuadrados perfectos. Y el objetivo es hacer que el segundo término sea el doble del producto de las raíces de esos cuadrados. Este proceso se llama “complementar cuadrados”

A continuación, se muestra cómo resolverlo con el siguiente ejemplo:

$$x^4 + x^2 + 1$$

1. Se determina cuál debe ser el segundo término del trinomio. Para esto se deben de hallar las raíces cuadradas del primer y tercer término, se multiplican entre sí y luego por dos. El término que se busca es “$2x^2$”. A continuación se busca un término que convierta al $\boldsymbol{x^2}$ en $2x^2$, ese es x^2

$$x^4 + x^2 + 1 + x^2 - x^2$$
$$x^4 + 2x^2 + 1 - x^2$$

También se resta x^2 para no alterar la expresión

2. Se factorizan los primeros tres términos del polinomio como un trinomio cuadrado perfecto

$$(x^2+1)^2-x^2$$

3. Y por último se factoriza la diferencia de cuadrados

$$(x^2+1+x)(x^2+1-x)$$

Entonces la expresión quedaría factorizada así:

$$x^4+x^2+1=(x^2+1+x)(x^2+1-x)$$

En resumen: se identifica por tener tres términos, el valor que se suma es el mismo que se resta para que el ejercicio original no cambie.

$$x^2+xy+ y^2= x^2+xy+ y^2+(xy-xy)=x^2+2xy+ y^2-xy=(x+y)^2-xy$$

Nótese que los paréntesis en "(xy – xy)" están a modo de aclaración visual.

3.7.1.1 Caso I- Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

Se identifica por tener tres términos, hay una literal con exponente al cuadrado y uno de ellos es el término independiente. Se resuelve por medio de dos paréntesis, en los cuales se colocan la raíz cuadrada de la variable, buscando dos números que multiplicados den como resultado el término independiente y sumados (pudiendo ser números negativos) den como resultado el término del medio.

Ejemplo 1: $a^2 + 2a - 15 = (a+5)(a-3)$

Ejemplo 2: $x^2+5x+6=(x+3)(x+2)$

Problemas propuestos

1. $x^2 + 8x + 16 =$
2. $9x^2 + 9x + 2 =$
3. $2x^2 + 12x + 16 =$
4. $x^2 - 10x + 25 =$
5. $9x^2 + 30x + 25 =$
6. $-x^2 + 6x - 9 =$

3.7.1.2 Caso II - Suma o diferencia de potencias a la n

La suma de dos números a la potencia *n*, $a^n + b^n$ se descompone en dos factores (siempre que *n* sea un número impar):

Quedando de la siguiente manera:

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + xy^{n-2} - y^{n-1}$$

Ejemplo:

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$$

La diferencia también es factorizable y en este caso no importa si *n* es par o impar. Quedando de la siguiente manera:

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}$$

Ejemplo:

$$x^3 - 1 \quad = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$
$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Las diferencias, ya sea de cuadrados o de cubos salen de un caso particular de esta generalización.

3.8.- FACTORIZACIÓN DE UN TRINOMIO DE LA FORMA ax^2+bx+c

En este caso se tienen tres términos:

El primer término tiene un coeficiente distinto de uno, la letra del segundo término tiene la mitad del exponente del término anterior y el tercer término es un término independiente, o sea sin una parte literal, así:

$$4x^2 + 12x + 9$$

Para factorizar una expresión de esta forma, se multiplica el término independiente por el coeficiente del primer término ($4x^2$):

$$4x^2 + 12x + (9 * 4)$$
$$4x^2 + 12x + 36$$

Luego debemos encontrar dos números que multiplicados entre sí den como resultado el término independiente y que su suma sea igual al coeficiente del término x:

$$6 * 6 = 36$$
$$6 + 6 = 12$$

Después procedemos a colocar de forma completa el término x^2 sin ser elevado al cuadrado en paréntesis, además colocamos los 2 términos descubiertos anteriormente:

$$(4x + 6)(4x + 6)$$

Para terminar dividimos estos términos por el coeficiente del término x^2:

$$\frac{(4x + 6)(4x + 6)}{4} = \frac{(4x + 6)}{2} \cdot \frac{(4x + 6)}{2}$$

$$(2x + 3)\ (2x + 3) = (2x + 3)^2$$

Ejemplo:

Factorizar $30x^2 - 47x + 14$

Organizar el trinomio en forma descendente o ascendente: $30x^2 - 47x + 14$

Multiplicar y dividir el trinomio original por su coeficiente principal o sea 30

$$= \frac{30\ (\ 30x^2 - 47x + 14)}{30}$$

Aplicar la propiedad distributiva en el numerador, teniendo cuidado de dejar la operación indicada en el segundo término, tanto en el primero como en el tercero la multiplicación se realiza normalmente:

$$= \frac{900x^2 - 47(30x) + 420}{30}$$

A continuación, se expresa el primer término como el cuadrado de lo que quedó encerrado en el paréntesis del segundo miembro, esto es:

$$= \frac{(30x)^2 \ - 47(30x) + 420}{30}$$

Se hace cambio de variable, sustituyendo el componente que se repite por una letra, haciendo: P = $30x$

$$= \frac{P^2 - 47P + 420}{30}$$

Ahora en el numerador tenemos un trinomio de la forma **x² + bx + c** y factorizamos la expresión, buscando dos números negativos que multiplicados entre sí den 420 y sumados den -47:

= (P -) (P -)

Se buscan parejas de números:

Dan 30 dan 14

420 = 30 * 14 = 2 * 3 * 5 * 2 * 7

420 = 30 * 14 = 2 * 3 * 5 * 2 * 7 = 6 y 70 si se hace la suma da -76 → no sirve

420 = 30 * 14 = 2 * 3 * 5 * 2 * 7 = 30 y 14 da - 44

420 = 30 * 14 = 2 * 3 * 5 * 2 * 7 = 10 y 42 da - 52

420 = 30 * 14 = 2 * 3 * 5 * 2 * 7 = 35 y 14 da -47

$$= \frac{(P - 35)(P - 12)}{30}$$

Después de haber factorizado el numerador, se deshace el cambio de variable

$$=\frac{(30x-35)(30x-12)}{30}$$

A continuación, se revisa cada uno de los factores obtenidos en el numerador para ver cuál de ellos se repite y si tiene factor común, en este caso 5 * 6 = 30 y dividido entre 30 queda:

$$=\frac{\cancel{5}*(6x-7)*\cancel{6}(5x-2)}{\cancel{30}}$$

Queda así terminada la factorización:

$$30x^2-47x+14=(6x-7)(5x-2)$$

3.9.- FACTORIZACIÓN POR EL MÉTODO DE EVALUACIÓN

Este método de factorización es aplicado para polinomios que tienen cuatro o más términos. El método utilizado es por le regla de Ruffini con el objetivo de encontrar un cociente (factor) que al multiplicarse por el divisor (factor) de como producto, el dividendo (polinomio a factorizar). Para cumplir con lo anterior es necesario observar que el residuo debe ser cero, o sea:

Teorema del factor.- Un polinomio P(x) tiene como factor a (x-a) si y solo si para x = a, P(a) = 0

Condición necesaria de divisibilidad.- Para que un polinomio P(x) sea divisible por (x-a) es condición necesaria pero no suficiente que el término independiente del dividendo sea divisible entre a.

Método de evaluación.- Este esquema está diseñado para factorizar completamente un polinomio entero en x, para él utilizamos, el teorema del factor y la división sintética o regla de Ruffini.

Ejemplo 1: 1) Factorizar por evaluación $x^4 + 3x^3 - 23x^2 - 75x - 50$

Solución: Se buscan los divisores de 50 que son: a= $(\pm1, \pm2, \pm5, \pm10, \pm25, \pm50)$
Hay que verificar con cada uno de los divisores hasta encontrar P(a) = 0

Por Ruffini:

	1	3	-23	-75	-50
-1		-1	-2	25	50
	1	2	-25	-50	0

Quedando los factores:

$$(x^3 + 2x^2 - 25x - 50) (x + 1)$$

Para factorizar completamente hay que factorizar cada uno de los factores si es posible. El primero de los factores anteriores no está completamente factorizado por lo que hay que hacerlo nuevamente por Ruffini o por cualquier otro método, en este caso trataremos nuevamente por Ruffini.

	1	2	-25	-50
-2		-2	0	50
	1	0	-25	0

Siguiendo los pasos anteriores se separan en factores

Quedando: $x^3 + 2x^2 - 25x - 50 = (x^2 - 25)(x + 2)$

Juntando todos los factores del polinomio inicial:

$$(x + 1)(x^2 - 25)(x + 2)$$

Observando el factor de en medio puede verse que aún falta por factorizar por lo que el resultado de la factorización completa es:

$$(x + 1) (x + 5) (x - 5) (x + 2).$$

Es recomendable utilizar como último recurso el método de evaluación pues es un procedimiento más largo que los anteriormente vistos.

Ejemplo 2.- Descomponer por evaluación $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

Los factores de 12 son ± (1, 2, 3, 4, 6, 12)

Los coeficientes del polinomio

1	-3	-4	+12	+1	x=1
	1x1 = +1	(-2)x1=-2	(-6)x1=-6		
1	-2	-6	+6		

El residuo es 6, luego el polinomio no se anula para x= 1, y no es divisible por (x-1)

1	-3	-4	+12	-1	x= -1
	1x(-)1 = -1	(-4)x(-1)=4	0x(-1)=0		
1	-4	0	+12		

El residuo es 12, luego el polinomio no se anula para x= -1, y no es divisible por x-(-1)= x + 1

1	-3	-4	+12	+2	x=2
	1x2 = +2	(-1)x(2)= -2	(-6)x(2)=-12		
1	-1	-6	0		

El residuo es 0, luego el polinomio dado se anula para x= 2, y es divisible por (x-2).
El cociente de dividir el polinomio dado $x^3 - 3x^{\,2} - 4x + 12$ entre x -2 será de segundo grado y sus coeficientes son 1, -1 y -6, luego el cociente será $x^2 - x + 6$

Por lo tanto: $x^3 - 3x^{\,2} - 4x + 12 = (x-2)(x^2$ - x + 6)

Factorizando el trinomio = $(x-2)(x+3)(x+2)$

Ejemplo 3.- Descomponer por evaluación $x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3$

Factorizando queda: $x^3(x^3 - 9x^2 + 24x - 20)$

Los factores de 20 son: ±(1,2,4,5,10,20)

DIVISION SINTETICA:

x^3	x^2	x	TI		
1	-9	24	-20	+1	x=1
	1x1 = +1	(-8)x1=-8	(16)x1=16		
1	-8	16	-4		

El residuo es -4, luego el polinomio no se anula para x= 1, y no es divisible por (x-1)

x^3	x^2	x	TI		
1	-9	24	-20	-1	x=-1
	1x(-1) = -1	(-10)x(-1)=10	(34)x(-1)=-34		
1	-10	34	-54		

El residuo es -54, luego el polinomio no se anula para x= -1, y no es divisible por x-(-1)= x + 1

x^3	x^2	x	TI		
1	-9	24	-20	+2	x=2
	1x(2) = 2	(-7)x(2)=-14	(10)x(2)=-20		
1	-7	10	0		

Por lo tanto: (x - 2)= 0

El residuo es 0, luego el polinomio dado se anula para x= 2, y es divisible por (x-2).
El cociente de dividir el polinomio dado $x^6-9x^5+24x^4-20x^3$ entre x - 2 será de segundo grado y sus coeficientes son 1, -7 y 10, luego el cociente será $x^2-7x+10=(x-2)(x-5)$

Por lo tanto: $x^6-\ 9x^5+\ 24x^4-\ 20x^3=x^3(x-2)^2(x-5)$

Factorizando el trinomio = $\boldsymbol{x^3(x-2)^2(x-5)}$

A modo de resumen, se entrega el siguiente cuadro con productos notables:

$(a+b)^2$	=	$a^2+2ab+b^2$	Binomio al cuadrado
$(a+b)^3$	=	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	Binomio al cubo
a^2-b^2	=	$(a+b)(a-b)$	Diferencia de cuadrados
a^3-b^3	=	$(a-b)(a^2+b^2+ab)$	Diferencia de cubos
a^3+b^3	=	$(a+b)(a^2+b^2-ab)$	Suma de cubos
a^4-b^4	=	$(a+b)(a-b))(a^2+b^2)$	Diferencia cuarta
$(a+b+c)^2$	=	$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$	Trinomio al cuadrado

4.- TRIGONOMETRÍA Y SOLUCIÓN DE ECUACIONES ALGEBRÁICAS.

Trigonometría es una palabra que deriva del griego Τριγωνομετρία, Tri (Τρι) tres, gono (γωνο) ángulo, metría (μετρία) medida, es decir, "medida de tres ángulos".

La trigonometría se basa en la semejanza de triángulos; esto es, si dos triángulos tienen sus lados proporcionales entonces sus ángulos deben ser iguales. Así que debe haber una manera de calcular los ángulos en términos de los lados. Las funciones trigonométricas son las que permiten calcular dichos ángulos.

La trigonometría, como su nombre lo indica, surgió de la necesidad de medir triángulos, lo cual puede ser posible utilizando las relaciones que guardan sus lados, los ángulos, las áreas, así como otros elementos geométricos.

4.1 TEOREMA DE PITÁGORAS

El Teorema de Pitágoras en un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa. Si a y b son las longitudes de los catetos, y c es la longitud de la hipotenusa, entonces $a^2 = b^2+c^2$. En un triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo recto se llama la hipotenusa y los otros lados se llaman catetos. Si a y b son las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo, y c es la longitud de la hipotenusa (figura 1), entonces el Teorema de Pitágoras establece que $a^2 = b^2+c^2$.

Es decir, la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa.

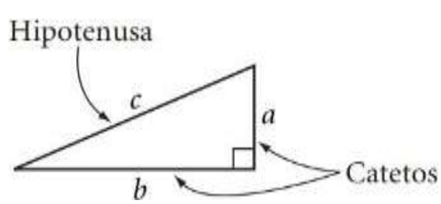


Figura 1

Ejemplo1: Una cancha de fútbol olímpica es un rectángulo de 100 metros de largo y 70 metros de ancho (Figura 2). ¿Qué longitud tiene la diagonal de la cancha?

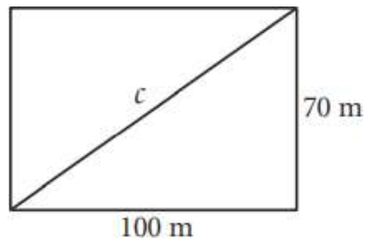


Figura 2

Solución: La diagonal es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, con catetos de longitudes 70 m y 100 m. Puedes usar el Teorema de Pitágoras para encontrar su longitud.

$a^2 + b^2 = c^2$ Teorema de Pitágoras.

$70^2 + 100^2 = c^2$ Sustituye los valores conocidos.

$4{,}900 + 10{,}000 = c^2$ Eleva los términos al cuadrado.

$14{,}900 = c^2$ Suma.

$122.065 = c$ Aplica raíz cuadrada en ambos lados de la igualdad.

Resultado: La diagonal tiene una longitud de 122.065 metros.

Ejemplo 2: ¿Cuál es el área de un triángulo rectángulo con un cateto de 5 pies de longitud y una hipotenusa de 13 pies de longitud (Figura 3)?

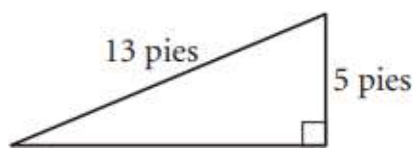


Figura 3

Solución: Puedes considerar los dos catetos como la base y la altura del triángulo. La longitud de un cateto es 5 pies. Para encontrar la longitud del otro cateto, usa el Teorema de Pitágoras.

$a^2 + b^2 = c^2$ Teorema de Pitágoras.

$5^2 + b^2 = 13^2$ Sustituye el valor del cateto y el de la hipotenusa.

$25 + b^2 = 169$ Eleva los términos al cuadrado.

$b^2 = 144$ Resta 25.

$b = 12$ Aplica raíz cuadrada en ambos lados de la igualdad.

Resultado: El otro cateto tiene una longitud de 12; entonces, el área es $A = \frac{1}{2}(12)(5)$= 30 pies cuadrados.

Problemas Propuestos

Problema 1.- Si a es la hipotenusa y b, c son los catetos de un triángulo rectángulo, calcular el lado que falta: (1) b = 10 cm, c = 6 cm.
Problema 2.- Si a es la hipotenusa y b, c son los catetos de un triángulo rectángulo, calcular el lado que falta: (3) a = 32 m, c = 12 m
Problema 3.- Si a es la hipotenusa y b, c son los catetos de un triángulo rectángulo, calcular el lado que falta: (5) a = 100 Km, b = 80 Km.

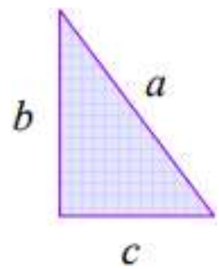


Figura 4.- Problemas 1,2 y 3.

Problema 4.- Hallar la diagonal (d) de un rectángulo sabiendo que los lados a y b miden lo que se indica: a = 2 m y b = 4 m.
Problema 5.- Hallar la diagonal (d) de un rectángulo sabiendo que los lados a y b miden lo que se indica: a = 5 m y b = 6 m.

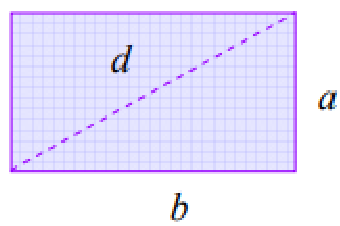


Figura 5.- Problemas 4 y 5.

4.2 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las razones trigonométricas se utilizan fundamentalmente en la solución de triángulos rectángulos, recordando que todo triángulo rectángulo tiene un ángulo de 90° y sus ángulos interiores suman 180°. La notación que se acostumbra es la siguiente (figura 6).

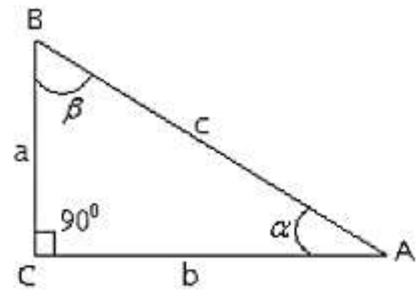


Figura 6 Representación de ángulos y catetos.

Tomamos el ángulo α para definir las razones trigonométricas de la siguiente manera:

$$sen\,\alpha = \frac{cateto\ \ opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{c} \qquad \csc\alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ \ opuesto} = \frac{c}{a}$$

$$\cos\alpha = \frac{cateto\ \ adyacente}{hipotenusa} = \frac{b}{c} \qquad \sec\alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ \ adyacente} = \frac{c}{b}$$

$$\tan\alpha = \frac{cateto\ \ opuesto}{cateto\ \ adyacente} = \frac{a}{b} \qquad \cot\alpha = \frac{cateto\ \ adyacente}{cateto\ \ opuesto} = \frac{b}{a}$$

Nota: Véase que las razones cot α , sec α , csc α son recíprocas de la tan α , cos α , sen α respectivamente.

Resolver un triángulo rectángulo implica obtener la medida de todos sus ángulos y de todas las longitudes de sus lados (figura 7). En donde se utilizan las razones trigonométricas y el teorema de Pitágoras fundamentalmente, el cual se enuncia así: “en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de sus catetos”.

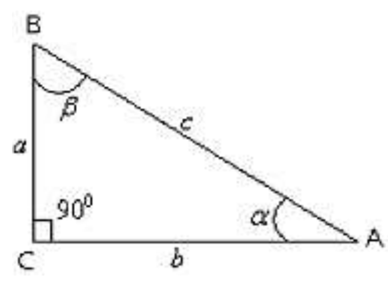


Figura 7

Ejemplo 3: Calcular β, α, y a representada a través de triángulo de la figura 8.

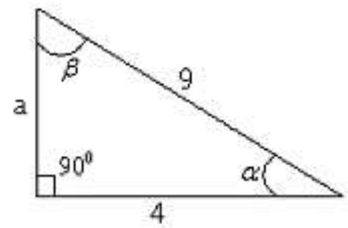


Figura 8

Solución:

Para obtener β:

$$sen\beta = \frac{4}{9}$$

$$\beta = sen^{-1}\left(\frac{4}{9}\right)$$

$$\beta = 26.38°$$

Para obtener a:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$a = \sqrt{9^2 - 4^2 = 81 - 16}$$

$$a = 8.06\, u.$$

Para obtener α:

dado que α + β + 90° = 180°

α = 180°- β - 90°=180°- 26.38° - 90°= 63.62°

Resultados: β = 26.38°

a = 8.06 u

α = 63.62°

Ejemplo 4: Calcular a, b y α representada a través de triángulo de la figura 9.

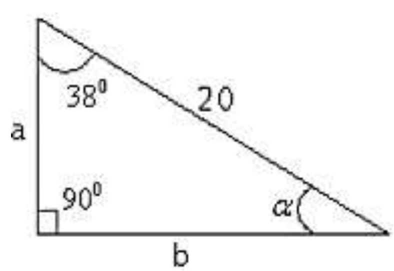


Figura 9

Solución:

Para obtener α:

dado que $\alpha + \beta + 90° = 180°$

$\alpha = 180° - \beta - 90° = 180° - 38° - 90° = 52°$

Para obtener a:

$$sen\,52° = \frac{a}{20}$$

$$a = 20\,sen\,52° = 15.76\,u.$$

Para obtener b:

$$cos\,\alpha = \frac{b}{c}$$

$$cos\,52\,° = \frac{b}{20}$$

$$b = 20\,cos\,52\,° = 12.31\,u.$$

Resultados: $\alpha = 52°$

a = 15.76 u.

b = 12.31 u.

Ley de los Senos y Ley de los Cosenos

Para resolver triángulos que no son rectángulos (que no tienen un ángulo de 90°) se hace uso de las leyes de los senos y/o de los cosenos. Los triángulos con estas características se llaman oblicuángulos y pueden tener 3 ángulos agudos o dos ángulos agudos y uno obtuso como se muestra en la figura 10:

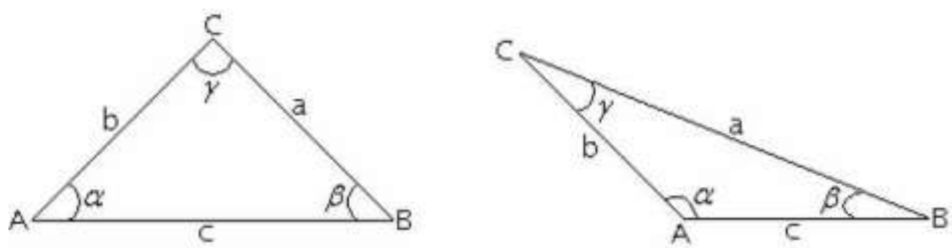


Figura 10

Ley de los senos: “Dos lados cualesquiera son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos”.

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma}$$

Ley de los cosenos: “El cuadrado de un lado cualquiera es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble de su producto por el coseno del ángulo que forman”.

$$b^2 + c^2 = a^2$$
$$a^2 + c^2 = b^2$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$

<u>Ejemplo 5:</u> Un avión vuela de la Ciudad de México a Puebla de los Ángeles, que está a 120 Km de distancia, luego cambia su dirección 400 y se dirige a la Ciudad de Perote como se muestra en la figura 11.

a) Si la distancia entre México y Perote es de 300 Km ¿Qué distancia hay de Puebla a Perote?

b) ¿Qué ángulo debe girar el piloto para volver a la Ciudad de México?

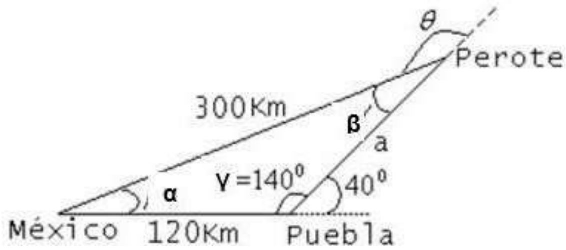


Figura 11

Solución:

Calcular beta con ley de senos.

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma}$$

Se sustituyen los valores.

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{120km}{sen\beta} = \frac{300km}{sen140°}$$

Se asocia la segunda y la tercera igualdad.

$$\frac{120km}{sen\beta} = \frac{300km}{sen140°}$$

Se despeja beta.

$$\frac{120km(sen140°)}{300km} = sen\beta$$

$sen\beta$=0.2571

$$\beta = sen^{-1}(0.2571) = 14.89°$$

$\alpha + \beta + 140° = 180°$

$\alpha = 180° - \beta - 90° = 180° - 14.89° - 90° = 25.1°$

Por lo tanto, la distancia entre Puebla y Perote se calcula de la siguiente manera

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{120km}{sen14.89°}$$

$$\frac{120km(sen25.1°)}{sen14.89°} = a = 198km.$$

El ángulo que debe de girar el piloto para volver es:

Θ=180°- β=180°-14.89°=165.1°

Resultados: β = 14.89°
α = 25.1°
a = 198km.
Θ=165.1°

Problemas Propuestos

Problema 6.- Un ángulo de un triángulo rectángulo mide 44º y el cateto adyacente 16 cm, calcula el otro cateto.

Problema 7.- Un ángulo de un triángulo rectángulo mide 47º y el cateto opuesto 8 cm, halla la hipotenusa.

Problema 8.- Un avión vuela una distancia de 300Km del D.F. al puerto de Acapulco, luego cambia su rumbo 500 y se dirige a Ixtapa Zihuatanejo que está a 100Km según la figura 12. a) ¿Qué tan lejos está el D.F. de Ixtapa Zihuatanejo? b) ¿Qué ángulo debe girar el piloto en Ixtapa Zihuatanejo para regresar al D.F.?

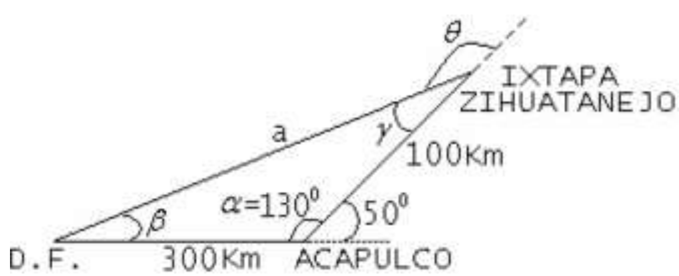


Figura 12

4.3 ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA.

Una ecuación es una igualdad algebraica en la que aparecen letras (incógnitas) con valor desconocido. El grado de una ecuación viene dado por el exponente mayor de la incógnita. En este tema trabajamos con ecuaciones lineales (de grado 1) con una incógnita.

Solucionar una ecuación es encontrar el valor o valores de las incógnitas que transforman la ecuación en una identidad. Dos ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

Para conseguir ecuaciones equivalentes, sólo se puede aplicar alguna de las siguientes propiedades:

Propiedad 1: Sumar o restar a las dos partes de la igualdad una misma expresión.
Propiedad 2: Multiplicar o dividir las dos partes de la igualdad por un número diferente de cero.

Ejemplo 6.- Calcular el valor de x de la siguiente ecuación: 5x+2=17.

$$5x + 2 = 17$$
$$5x = -2 + 17$$
$$5x = 15$$
$$x = \frac{15}{5}$$
$$x = 3$$

Comprobación sustituyendo x=3 en la ecuación original.

$$5x + 2 = 17$$
$$5(3) + 2 = 17$$
$$15 + 2 = 17$$

Ejemplo 7.- Calcular el valor de x de la siguiente ecuación: 3x-5=2x-3.

$$3x - 5 = 2x - 3$$
$$3x - 5 - 2x + 3 = 0$$
$$x - 2 = 0$$
$$x = 2$$

Comprobación sustituyendo x=2 en la ecuación original.

$3x - 5 = 2x - 3$

$3(2) - 5 = 2(2) - 3$

$6 - 5 = 4 - 3$

1=1.

Problemas Propuestos

Problema 9.- 3x + 5 = 5x - 13.
Problema 10.- 5(7 − x) = 31− x
Problema 11.- 4(2 − 3x) = −2x - 27
Problema 12.- 6x − 8 = 4(−2x + 5)

4.4. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Una ecuación de segundo grado, ecuación cuadrática es una ecuación polinómica donde el mayor exponente es igual a dos. Normalmente, la expresión se refiere al caso en que sólo aparece una incógnita y que se expresa de la siguiente forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Dicha ecuación se resuelve a través de la fórmula general.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo 8: resolver la siguiente ecuación de segundo grado.

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Solución:
Dónde: a=1
b=-5
c=6

Sustituyendo valores en la fórmula general.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x1 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x2 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Comprobación sustituyendo x1=3, x2=2 en la ecuación original.

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$3^2 - 5(3) + 6 = 0$$
$$9 - 15 + 6 = 0$$
$$15 - 15 = 0$$
$$0 = 0$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$2^2 - 5(2) + 6 = 0$$
$$4 - 10 + 6 = 0$$
$$10 - 10 = 0$$
$$0 = 0$$

Ejemplo 9: resolver la siguiente ecuación de segundo grado.

$$3x^2 - 5x + 2 = 0$$

Solución:

Dónde: a=3

b=-5

c=2

Sustituyendo valores en la fórmula general.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6}$$

$x1 =$ $x2 =$______

$\frac{5+1}{6}$

$5-1$

______

6

6
= −
= 1
6
4

2
= − −
=
6

3

Comprobación sustituyendo x1=1, x2=2/3 en la ecuación original.

$$3x^2-5x+2=0$$
$$3(1)^2-5(1)+2=0$$
$$3-5+2=0$$
$$5-5=0$$
$$0=0$$
$$3x^2-5x+2=0$$
$$3\left(\frac{2}{3}\right)^2-5\left(\frac{2}{3}\right)+2=0$$
$$\frac{4}{3}-\frac{10}{3}+2=0$$
$$-2+2=0$$
$$0=0$$

Problemas Propuestos

Problema 13.- $4x^2-3x-2=0$
Problema 14.- $x^2-7x+12=0$
Problema 15.- $x^2+10x+25=0$
Problema 16.- $x^2+6x+9=0$

4.5 ECUACIONES SIMULTÁNEAS CON DOS Y TRES INCÓGNITAS

Ecuaciones Simultáneas de Primer Grado con dos Incógnitas

Dos o más ecuaciones con dos incógnitas son simultáneas cuando satisfacen iguales valores de las incógnitas. Para resolver ecuaciones de esta clase, es necesario obtener de las dos ecuaciones dadas una sola ecuación con una incógnita. Esta operación se llama eliminación.

MÉTODOS DE ELIMINACIÓN

Son tres los métodos de eliminación más utilizados: Método de igualación, de sustitución y de suma o resta.

MÉTODO DE ELIMINACIÓN POR IGUALACIÓN.

Ejemplo 10:,- Resolver el sistema:

3x +5y =7 ec 1
2x -y =-4 ec2

Despejamos cualquiera de las incógnitas; por ejemplo, x en ambas ecuaciones.
Despejamos x en ec 1:

$$x=\frac{7-5y}{3}$$

Despejamos x en ec 2:

$$x=\frac{-4+y}{2}$$

Ahora igualamos entre si los dos valores de x que hemos obtenido:

$$\frac{7-5y}{3}=\frac{-4+y}{2}$$

Ahora ya tenemos una sola ecuación con una incógnita; se eliminó la x.

$$2(7-5y)=3(-4+y)$$

Resolvemos esta ecuación para obtener el valor de y.

$$14-10y=-12+3y$$
$$-10y-3y=-12-14$$
$$-13y=-26$$
$$y=\frac{-26}{-13}=2$$

Para encontrar el valor de x, se sustituye el valor de y en la ecuación más sencilla, obteniéndose:

$$\begin{array}{llll} 3x & +5y & =7 & ec\ 1 \\ 2x & -y & =-4 & ec2 \end{array}$$
$$3x+5(2)=7$$
$$3x+10=7$$
$$3x=7-10$$
$$3x=-3$$
$$x=\frac{-3}{3}=-1$$

Para verificar si estos valores son correctos se deberá sustituir x= -1, y = 2 en las dos ecuaciones, ambas se convierten en identidad.

$$\begin{array}{llll} 3x & +5y & =7 & ec\ 1 \\ 2x & -y & =-4 & ec\ 2 \end{array}$$
$$3(-1)+5(2)=7 \quad ec\ 1$$
$$-3+10=7$$
$$7=7$$
$$2(-1)-(2)=-4 \quad ec\ 2$$
$$-2-2=-4$$
$$-4=-4$$

Ecuaciones Simultáneas de Primer Grado con tres Incógnitas

Se pueden interpretar estos sistemas como un conjunto de tres planos en el espacio real tridimensional. Para resolver este tipo de sistemas se aplicará reducción o eliminación, igualación, suma-resta o cualquier otro método, de forma que cada ecuación tenga una incógnita menos que la anterior, y se pueda a su vez llegar a obtener el valor de las 3 incógnitas.

MÉTODO DE IGUALACIÓN.

<u>*Ejemplo 11.-*</u> Resolver el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas de 3x3.

$$\begin{array}{llll} 2x & -y & -4z & = 12 \\ 3x & -4y+2z & & = -11 \\ -5x & +2y-z & & = 2 \end{array}$$

SOLUCIÓN:

Elegir la variable x para despejar en las 3 ecuaciones.

$$x = \frac{12+y+4z}{2} \qquad ec\ 4$$

$$x = \frac{-11+4y-2z}{3} \qquad ec\ 5$$

$$x = \frac{2-2y+z}{-5} \qquad ec\ 6$$

Asociar ec 4 y 5 y después 4 y 6.

$$\frac{12+y+4z}{2} = \frac{-11+4y-2z}{3}$$

$$3(12+y+4z) = 2(-11+4y-2z)$$

$$36+3y+12z = -22+8y-4z$$

$$3y-8y+12z+4z = -22-36$$

$$-5y+16z = -58 \qquad ec\ 7$$

$$\frac{12+y+4z}{2} = \frac{2-2y+z}{-5}$$

$$-5(12+y+4z) = 2(2-2y+z)$$

$$-60-5y-20z = 4-4y+2z$$

$$-5y+4y-20z-2z = 4+60$$

$$-y-22z = 64 \qquad ec\ 8$$

Resolver las ecuaciones 7 y 8, por el método de igualación.

$$\begin{array}{llll} -5y & +16z & = -58 & ec\ 7 \\ -y & -22z & = 64 & ec\ 8 \end{array}$$

Despejar y:

$$y = \frac{-58 - 16z}{-5}$$

$$y = \frac{64 + 22z}{-1}$$

Igualando:

$$\frac{-58 - 16z}{-5} = \frac{64 + 22z}{-1}$$

$$-1(-58 - 16z) = -5(64 + 22z)$$

$$58 + 16z = -320 - 110z$$

$$16z + 110z = -320 - 58$$

$$126z = -378$$

$$z = \frac{-378}{126} = -3$$

Sustituir z=-3 en la ec 7 y/o 8 en la que sea más fácil.

$$-y - 22z = 64$$

$$-y - 22(-3) = 64$$

$$-y + 66 = 64$$

$$y = 66 - 64$$

$$y = 2$$

Sustituir z=-3, y=2 en ec 4 para calcular x.

$$x = \frac{12 + y + 4z}{2} \qquad ec\ 4$$

$$x = \frac{12 + 2 + 4(-3)}{2} = \frac{12 + 2 - 12}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Comprobación, Sustituir z=-3, y=2, x=1 en ec 1.

$$2x - y - 4z = 12$$

$$2(1) - 2 - 4(-3) = 12$$

$$2 - 2 + 12 = 12$$

$$12 = 12$$

Problemas Propuestos

Problema 17.- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones simultaneas por el método de igualación.

$$\begin{aligned} 3x \quad +4y \quad &= 8 \qquad ec\ 1 \\ 8x \quad -9y \quad &= -77 \qquad ec\ 2 \end{aligned}$$

Problema 18.- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones simultaneas por el método de igualación.

$$\begin{aligned} 6x \quad -5y \quad &= -3 \qquad ec\ 1 \\ 2x \quad +3y \quad &= 13 \qquad ec\ 2 \end{aligned}$$

Problema 19.- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones simultaneas por el método de igualación.

$$\begin{aligned} x \quad -5y \quad &= -3 \qquad ec\ 1 \\ x \quad +3y \quad &= 13 \qquad ec\ 2 \end{aligned}$$

Problema 20.- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas de 3x3, por el método de igualación.

$$\begin{aligned} 2x \quad + 3y + \quad z \quad &= -1 \\ 5x \quad + 7y - \quad z \quad &= 5 \\ 4x \quad + 3y \qquad &= 5 \end{aligned}$$

5: VECTORES Y ESCALARES

5.1. SISTEMA DE UNIDADES

Este sistema fue creado en una convención mundial de ciencia celebrada en París, Francia; en el siglo XVII para ser exactos, allá por el año 1795. Este sistema fue muy importante porque fue el primer patrón que existió para las unidades de medidas, entre ellas se encuentras las unidades como el metro, el kilogramo-peso y el litro. ¿Qué usaron para definir estas unidades?, pues aquí viene lo importante, **para definir dichas unidades, utilizaron la dimensión de la tierra y la densidad del agua.**

Se dice que, para medir las longitudes en ese tiempo, se dividió un meridiano de nuestro planeta en 40 millones de partes iguales, y a cada parte de longitud se le llamó metro.

Después de realizar dicho acuerdo con la longitud, ésta misma sirvió de ejemplo para obtener las demás unidades. Es por eso que la palabra metro significa "medida". Una característica importante de este sistema, fue sin duda la división decimal que tenía; por ejemplo, el uso de los **prefijos como: deci, centi o mili**.

- Decímetro = décima parte del metro
- Centímetro = centésima para del metro
- Milímetro = la milésima parte del metro

Por otra parte, tenemos también a los prefijos como: **deca, hecto, kilo.**

- Decámetro = diez veces el valor del metro
- Hectómetro = cien veces el valor del metro
- Kilómetro = mil veces el valor del metro

Sistema Cegesimal o CGS

Después del sistema métrico decimal, y con el avance de la Física en el siglo XVIII, se realizó el Congreso Internacional de los Electricistas, donde nuevamente se llevó a cabo en París, Francia. Después de grandes acuerdos en el congreso internacional y liderado por el físico alemán Karl Gauss, se propuso el **Sistema Cegesimal** o también conocido por sus siglas **CGS**, en dicho sistema se establece la longitud para el centímetro, la masa para el gramo y el segundo para el tiempo.

Cabe mencionar que en ese tiempo donde la física empezaba a tener grandes avances históricos, ya se tenía claro que el peso y la masa eran dos magnitudes muy diferentes, pues ya había estudio sobre las leyes de Newton y sobre la gravitación universal.

Sistema MKS

Pasaron cerca de 50 años, para que el Congreso Internacional de los Electricistas se llevara a cabo en Bruselas, Bélgica, en donde un ingeniero Italiano de nombre Giovanni Giorgi propone su sistema MKS cuyas iniciales son (Metro – Kilogramo – Segundo).

Sistema Internacional de Unidades (SI)

El avance de la ciencia era evidente para el siglo XIX, y no hace muchos años en la ciudad de Ginebra, Suiza. Pero era necesario actualizar las unidades de medida, es por ello que surge el **Sistema Internacional de Unidades**(SI), este sistema tiene su esenciay base en el sistema MKS, solo que a excepción del MKS este sistema establece siete **magnitudes fundamentales**.

- Longitud → Metro
- Masa → Kilogramo
- Tiempo → Segundo
- Temperatura → Kelvin
- Intensidad de Corriente Eléctrica → Ampere
- Intensidad Luminosa → Candela
- Cantidad de Sustancia → Mol

PREFIJOS UTILIZADOS PARA EL SISTEMA INTERNACIONAL

Prefijo	Símbolo	Valor	Equivalencia en Unidades
exa	E	1×10^{18}	trillón
peta	P	1×10^{15}	mil billones
tera	T	1×10^{12}	billón
giga	G	1×10^{9}	mil millones
mega	M	1×10^{6}	millón
kilo	K	1×10^{3}	mil
hecto	h	1×10^{2}	cien
deca	da	1×10	diez
unidad	1	1	uno
deci	d	1×10^{-1}	décima
centi	c	1×10^{-2}	centésima
mili	m	1×10^{-3}	milésima
micro	µ	1×10^{-6}	millonésima
nano	n	1×10^{-9}	mil millonésimas
pico	p	1×10^{-12}	billonésima
femto	f	1×10^{-15}	mil billonésimas
atto	a	1×10^{-18}	trillonésima

Magnitudes Derivadas

Las magnitudes derivadas **son aquellas magnitudes que se pueden obtener a partir de otras magnitudes físicas**, es muy común obtener magnitudes derivadas al multiplicar o dividir las magnitudes fundamentales. Veamos un ejemplo muy sencillo:

Longitud/Tiempo = m/s → (metro / segundo)

Obtenemos la velocidad a través la longitud y el tiempo, es decir a partir de las magnitudes fundamentales.

Y así podemos encontrarnos con varias magnitudes derivadas, tales como la aceleración, fuerza, trabajo, energía, presión, potencia, densidad, etc. En la siguiente imagen, se puede observar mucho mejor.

Magnitud	SI	CGS	Inglés
Longitud	metro (m)	centímetro (cm)	Pie
Masa	kilogramo (kg)	gramo (g)	libra (lb)
Tiempo	segundo (s)	segundo (s)	segundo (s)
Área o Superficie	m^2	cm^2	pie^2
Volumen	m^3	cm^3	pie^3
Velocidad	m/s	cm/s	pie/s
Aceleración	m/s^2	cm/s^2	pie/s^2
Fuerza	kg m/s^2= Newton	g cm/s^2 = dina	libra pie/s^2 = Poundal
Trabajo y Energía	(N)(m) = Joule	(dina)(cm) = ergio	(poundal)(pie)
Presión	N/m^2 = Pascal	$dina/cm^2$ = baria	$poundal/pie^2$
Potencia	joules/s = watt	ergio/s	(poundal)(pie)/s

5.2.- CONVERSIÓN DE UNIDADES

La conversión de unidades es la transformación del valor numérico de una magnitud física, expresado en una cierta unidad de medida, en otro valor numérico equivalente y expresado en otra unidad de medida de la misma naturaleza. Este proceso suele realizarse con el uso de los factores de conversión y las tablas de conversión de unidades. Frecuentemente basta multiplicar por una fracción (factor de una conversión) y el resultado es otra medida equivalente, en la que han cambiado las unidades. Cuando el cambio de unidades implica la transformación de varias unidades, se pueden utilizar varios factores de conversión uno tras otro, de forma que el resultado final será la medida equivalente en las unidades que buscamos.

Tablas de Conversión de Unidades

UNIDADES FUNDAMENTALES DE LONGITUD.	
UNIDADES	**EQUIVALENCIA**
1 Pulgada (in)	2.54 cm, 0.083 ft, 0.027 yd
1 Pie (ft)	0.3048 m, 12 in, 0.333 yd
1 Yarda (yd)	0.914 m, 36 in, 3 ft
1 Milla (mi)	1609.344 m, 5280 ft, 63360 in
1 Metro (m)	39.369 in, 3.280 ft, 1.093 yd, 100 cm, 1000 mm
1 Kilómetro (km)	1000 m
1 Centímetro (cm)	10 mm
1 Milímetro (mm)	0.001 m

UNIDADES FUNDAMENTALES DE MASA.	
UNIDADES	**EQUIVALENCIA**
1 Kilogramo	1000 g, 35.273 oz, 2.204 lb
1 Onza	28.349 g, 0.0625 lb
1 Libra	453.592 g, 0.453 kg, 16 oz
1 Tonelada	1000 000 g, 1000 kg, 2204.623 lb, 35273.96 oz

UNIDADES FUNDAMENTALES DE TIEMPO.	
UNIDADES	**EQUIVALENCIA**
1 Año	365 días, 8760 horas, 525600 minutos
1 Hora	60 minutos, 3600 segundos
1 Minuto	60 segundos

UNIDADES FUNDAMENTALES DE ÁREA.	
UNIDADES	**EQUIVALENCIA**
1 Pie cuadrado (ft^2)	929.0304 cm^2, 0.092 m^2, 144 in^2, 0.111 yd^2
1 Yarda cuadrado (yd^2)	8361.274 cm^2, 0.836 m^2, 1296 in^2, 9 ft^2
1 Metro cuadrado (m^2)	10 000 cm^2, 10.763 ft^2, 1550.003 in^2, 1.195 yd^2
1 Centímetro cuadrado (cm^2)	0.0001 m^2, 0.0010 ft^2, 0.1550 in^2, 0.00011 yd^2
1 Pulgada Cuadrada (in^2)	6.4516 ^{2}, 0.000645 m^2, 0.00694 ft^2, 0.000771 yd^2

5.2.1 Factores de conversión

El factor de conversión o factor unidad (método de Walshaw de la unidad sin dimensiones) es un método de conversión que se basa en multiplicar por una o varias fracciones en las que el numerador y el denominador son cantidades iguales expresadas en unidades de medida distintas, de tal manera, que cada fracción equivale a la unidad. Es un método muy efectivo para cambio de unidades y resolución de ejercicios sencillos dejando de utilizar la regla de tres.

Ejemplo 1. Convierta 4 km a metros

Solución: Lo primero que haremos será analizar cuántos metros caben en 1 kilómetro, y si observamos la tabla, vemos que cabe exactamente 1 000 metros, entonces aplicamos nuestro **factor de conversión** de tal manera que quede expresado de la siguiente manera:

$$4km\left(\frac{1000m}{1km}\right) = 4000m$$

Observe algo importante, siempre que se usa un factor de conversión, se intenta qué las unidades queden arriba o abajo, de tal manera que se pueda eliminar. Por ejemplo, vea la siguiente imagen.

$$7\cancel{km}\left(\frac{1000m}{1\cancel{km}}\right) = 7000m$$

Ejemplo 2. Convierta 7 pies a m

Solución: Para convertir 7 pies a metros, necesitamos verificar nuestra tabla, y observar el factor de conversión que utilizaremos. En este caso sería; 1 metro = 3.28 pies (ft)

$$7pies\left(\frac{1}{3.28pies}\right) = 2.134$$

Veamos el mismo ejemplo de forma gráfica (para darnos cuenta como se simplifican las unidades de medida).

$$7\cancel{pies}\left(\frac{1m}{3.28\cancel{pies}}\right) = 2.134m$$

Ejemplo 3. Convierta 13 km/h a m/s

Solución: En este caso tenemos velocidad en unidades de longitud y tiempo, para ello veamos los recursos que tenemos para identificar los factores de conversión posibles. Sabemos que:

1 km = 1000 m　　　　1 hr = 60 min　　　　1 min = 60 s

Con estos datos podemos obtener la conversión. Aquí veamos la solución más clara, en caso que tengas dudas:

$$13\frac{\cancel{km}}{\cancel{h}}\left(\frac{1000m}{1\cancel{km}}\right)\left(\frac{1\cancel{h}}{60\cancel{min}}\right)\left(\frac{1\cancel{min}}{60s}\right)=3.61\frac{m}{s}$$

*Ejemplo 4***.** Convierta 7 galones a centímetros cúbicos

Solución: En este caso, necesitamos observar si hay alguna relación directa con el factor de conversión con galones y centímetros cúbicos, pero vemos qué no hay (en nuestra tabla), entonces tenemos que guiarnos con algo que nos pueda ayudar a relacionar dichas medidas, por ejemplo. Sabemos que: 1 Galón = 3.785 litros y 1 Litro = 1000 cm^3. Con estos datos, podemos obtener la respuesta. Entonces colocamos.

$$7gal\left(\frac{3.785l}{1gal}\right)\left(\frac{1000cm^3}{1l}\right)=26495cm^3$$

Veamos más claro la conversión:

$$7\cancel{gal}\left(\frac{3.785\cancel{l}}{1\cancel{gal}}\right)\left(\frac{1000cm^3}{1\cancel{l}}\right)=26495cm^3$$

Ejemplo 5. Convierta 8 millas/h a m/s

Solución: Al igual que el ejemplo 3, tenemos que relacionar los factores de conversión disponibles para realizar nuestro cálculo de manera correcta, para ello comenzamos con utilizar:

1 milla = 1.609 km　　　　1 hr = 60 min
1 km = 1000 m　　　　1 min = 60 s

Ahora si podemos realizar la conversión. Para observar la conversión, veamos la imagen:

$$8\frac{\cancel{millas}}{\cancel{h}}\left(\frac{1.609\cancel{km}}{1\cancel{milla}}\right)\left(\frac{1000m}{1\cancel{km}}\right)\left(\frac{1\cancel{h}}{60\cancel{min}}\right)\left(\frac{1\cancel{min}}{60s}\right)=3.57\frac{m}{s}$$

Ejercicios Propuestos

a. Convierta 6 km a pies
b. Convierta 5 millas/h a m/s
c. Convierta 96500 cm^3/min a gal/s

5.3.- DEFINICIÓN DE VECTORES

Un vector puede considerarse como una flecha que conecta dos puntos A Y B en el plano o en el espacio. La cola de la flecha se llama punto inicial y la punta de la flecha se denomina punto final (véase figura 1).

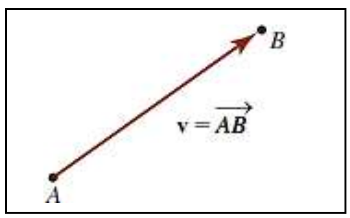


Figura 1.- Un vector del punto inicial A al punto final B.

En matemáticas e ingeniería un escalar es simplemente un número real y se representa mediante una letra minúscula a,m, n etc. Los escalares se usan para representar magnitudes y pueden tener unidades específicas asociadas. En física, un vector (también llamado vector euclidiano o vector geométrico) es una magnitud física definida en un sistema de referencia (*x,y* en R^2 o *x,y,z* en R^3) que se caracteriza por tener 3 características: magnitud (o longitud), dirección (u orientación) y sentido.

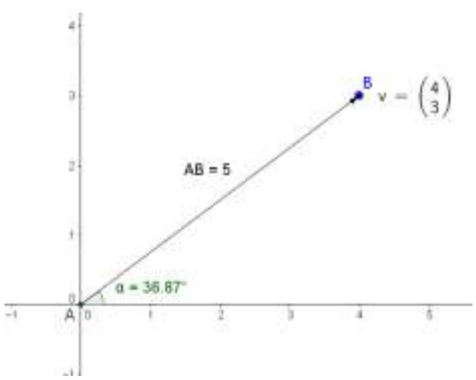


Figura 2.- Vector v, magnitud AB=5, dirección θ= 36.87º y sentido (+ positivo).

<u>Ejercicio 6.-</u> Calcule la magnitud, dirección del siguiente vector: v = (4,3). La magnitud del vector $\vec{AB} = v$, se puede calcular aplicando el teorema de Pitágoras.

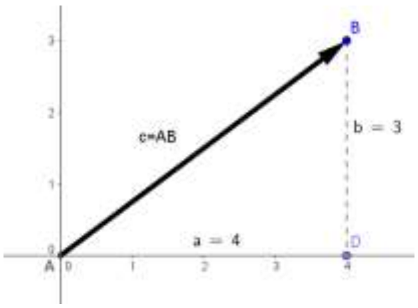


Figura 3.- Representación del vector v, y los catetos respectivos de este triángulo.

Teorema de Pitágoras: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Dónde: a=4 y b=3 (véase la figura 3) $c = \vec{AB} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

También se puede representar la magnitud del vector v de la siguiente manera:

$$|\vec{AB}| = |v| = 5 \ .$$

La dirección o ángulo del vector se puede calcular con la siguiente función trigonométrica:

$$tan \ \text{a} = \frac{cateto \ opuesto}{cateto \ adyacente}$$

Nota: se utiliza la función trigonométrica tangente ya que la función seno y la función coseno dependen directamente de la hipotenusa y esta última es desconocida por lo que se calcula para obtener la magnitud del vector.

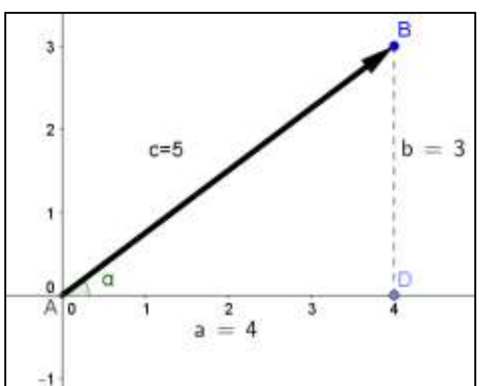


Figura 4.- Ángulo Alfa α en el vértice A del triángulo ABD.

Dónde: Cateto opuesto= b Cateto adyacente=a

$$\tan\ a = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{3}{4} = 0.75$$

$\tan$ a$= 0.75$
a$= \tan^{-1}(0.75) = 36.869°$
a$= 36.869°$

5.3.1 Propiedades de los vectores

Definición de términos

Magnitudes: Magnitud es una cantidad formada por dos partes, una cuantitativa (un número) y otra cualitativa (la unidad, o la dirección o sentido), por ejemplo: 3 km, 60 km/hr. Este concepto es muy importante pues de ahora en adelante, siempre que escribas un número deberás agregarle la unidad ya que en física únicamente trabajamos con magnitudes.

Variables: La variable es la letra que representa a una "magnitud", por ejemplo 3 km es una distancia y lo representa la variable d, 2 h es tiempo y se representa con la variable t, etc. Las magnitudes físicas se clasifican en dos grandes grupos: **Vectores y Escalares**.

El tema de VECTORES es otro de repaso de matemática del que se necesita un conocimiento previo para entender algunos aspectos de Física.

En este tema principalmente se pretende ayudarle a usar el razonamiento abstracto (la capacidad de imaginar cosas y sacar conclusiones) y el pensamiento geoespacial (la capacidad de imaginar que está en cierto lugar que se mueve respecto a otro) que son muy útiles en la vida para interpretar problemas, mapas, etc.

De la inducción didáctica (experimento que realizó con su docente) de este tema, pudo notar que en el I experimento (el del compañero a quien le taparon los ojos) era necesario darle dos tipos de información:

A) ¿Cuánto se mueve? (un número).
B) ¿Hacia dónde se mueve? (dirección).

Lo anterior nos hace concluir que hay dos tipos de cantidades, como se verá:

1) ***Escalares:*** *Las cantidades definidas completamente por una magnitud, se denominan "Escalares", por ejemplo:*

Hay un litro de leche
Han pasado 5 minutos
Hay 27 grados centígrados de temperatura
Tengo 3 kg de carne

Recuerde: ***Magnitud es una cantidad numérica con su correspondiente unidad.***
Este concepto es muy importante pues de ahora en adelante, siempre que escribas un número deberás agregarle la unidad ya que en física únicamente trabajamos con magnitudes.

*2)****Vectores:*** *Las cantidades que requieren además de su magnitud (su valor numérico y unidad), una dirección o un sentido, para poder definirlas completamente se denominan "vectores". Básicamente un vector es una magnitud con dirección o sentido. La dirección se refiere al ángulo, el sentido es la orientación respecto a una referencia (izquierda, derecha, norte, Sureste, etc).*

<u>Ejemplo 7:</u>

- hay 4cm de altura.
- tiene una velocidad de 40km/h hacia arriba y 60 km/h hacia abajo.
- hace una fuerza 40N hacia la pared.
- 40 N a 45º al Noroeste. Aquí en este vector se define el tamaño (40 N), la dirección (45º) y el sentido (Noroeste)
- 40 N a 135º. En este vector solo se define su tamaño (40 N) y su dirección absoluta usando como referencia los ejes de coordenadas cartesianas (135º).

Note que en el caso de vectores la cantidad siempre lleva la dirección.

Cuando una cantidad es un vector generalmente se representa mediante una flecha sobre la variable que lo denota, ojo no sobre el número, ejemplo:

$$\vec{a} = \frac{4m}{s^2}\, hacia\ arriba$$

O bien otro ejemplo: $\vec{F} = 50\,N \;\; hacia\ la\ pared$

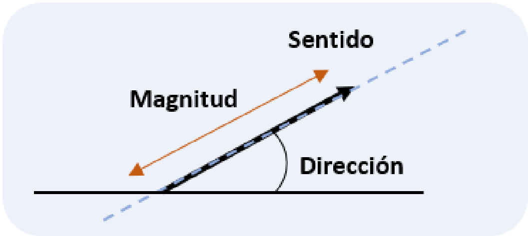
Existen dos tipos de magnitudes en Física, las magnitudes escalares y las magnitudes vectoriales,

Magnitud Escalar. La magnitud escalar es aquella magnitud que no posee dirección, ni sentido, es decir, aquellas magnitudes que solamente se expresa en una cantidad y unidad de medida, por ejemplo: la masa, el volumen, la temperatura, entre otros.

Magnitud Vectorial. Por otro lado, tenemos las magnitudes vectoriales, que, a diferencia de las escalares, éstas si poseen dirección y sentido, además de un punto de aplicación. Podemos citar algunos ejemplos como la velocidad, la aceleración, la fuerza, el desplazamiento, etc. Es muy diferente a lo que una cantidad escalar representa.

Características de un Vector. Esto de aquí abajo es un vector, algunos les llaman "vector libre", ya que dicho vector no está actuando en algún punto de aplicación:

Para que un vector exista, debe **poseer ciertas características**. Aquí vemos que características debe de tener.



Magnitud. La magnitud en un vector indica el valor numérico del vector a través de una unidad de medida.

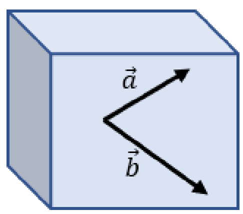
Dirección. Por lo general los vectores poseen una dirección, y pueden representarse mediante un plano cartesiano rectangular, entre cuatro cuadrantes y con la división de 90° cada uno, el lado positivo comienza a partir del eje "x".

Sentido. Para representar el sentido en un vector, se le asigna una punta de flecha e indica hacía donde se dirige dicho vector, donde libremente puede ser hacía arriba, abajo, derecha, e izquierda. Algunos autores consideran que el "Punto de Aplicación" tiene que ser una característica más del vector, lo podemos considerar, pero es lógico qué donde haya un vector tiene que existir también el punto de aplicación, al menos para los ejercicios y ejemplos que abordamos.

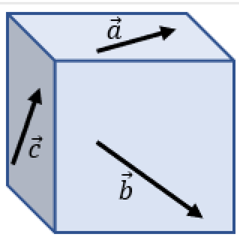
Tipos de Vectores

A pesar de que un vector es un vector (en definición), existen algunos tipos de vectores que iremos viendo, pero que es necesario mencionarlos para entender mejor el tema.

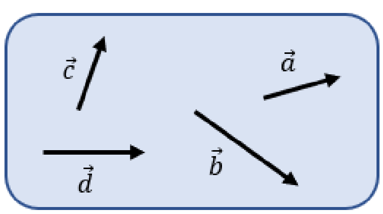
Vectores Coplanares. Los vectores coplanares, son aquellos vectores que están sobre el mismo plano, en dos ejes. Por ejemplo:



Vectores No Coplanares. Como su nombre lo dice, los vectores no coplanares son aquellos vectores que no están en el mismo plano, tal como se ilustra en la imagen:

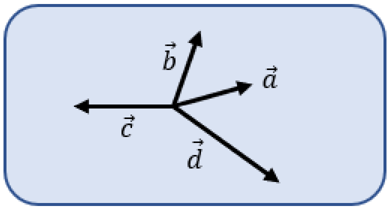


Vectores Libres. Son aquellos vectores que no posee un punto de aplicación en particular, tal como se ilustra en la imagen:



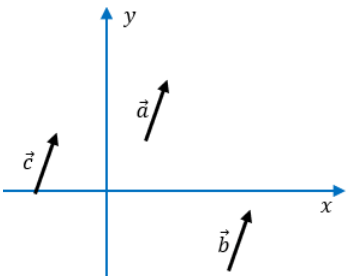
Vectores Colineales. Son aquellos vectores que se encuentran en la misma dirección o línea de acción, tal como se ilustra en la imagen:

Vectores Concurrentes o Angulares. Los vectores concurrentes son aquellos vectores que se cruzan en algún punto sobre la misma dirección o línea de acción, y asumen también el nombre de vectores angulares que son aquellos que forman un ángulo entre ellos. tal como se ilustra en la imagen:



Propiedades de un vector

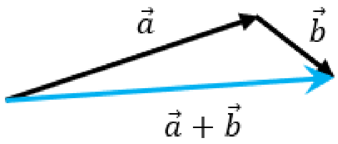
a) Igualdad de dos vectores. Se dice que dos vectores son iguales siempre y cuando su magnitud, dirección y sentido también sean iguales.



Los tres vectores son iguales, tienen la misma magnitud, dirección y sentido, en lo único que no son iguales es en su punto de aplicación.

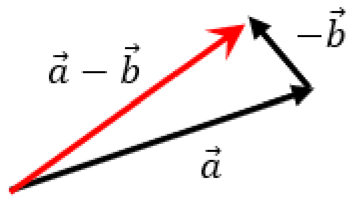
b) Suma de los Vectores. Solamente se pueden sumar dos o más vectores si tienen las mismas unidades de medida, es decir; fuerza con fuerza, aceleración con aceleración, etc. Pero no se pueden sumar un vector de desplazamiento con uno de fuerza.

Así también las magnitudes escalares no se pueden sumar si no tienen las mismas unidades. En el siguiente artículo, veremos cómo sumar los vectores de manera algebraica y gráfica. Por ahora basta



c) Negativo de un vector (Resta de vectores). Un vector es negativo si éste tiene la misma magnitud y dirección, pero su sentido es contrario

Tomando el ejemplo anterior de la suma de vectores, intentaremos restarlos:



Nota: Hemos cambiado la dirección del vector b

d) Ley conmutativa de la adición de vectores. Al momento de sumar los vectores, no importa de qué forma se sumen, la resultante de dicha adición no alterará el resultado. Es lo mismo sumar un vector A con un vector B, que decir que un vector B está sumandocon un vector A.

$$a + \vec{b} = \vec{b} + a$$

e) Propiedad de Vectores libres. Los vectores no se modifican si éstos se trasladan paralelamente así mismos. Esta propiedad es importante, ya que nos permitirá realizar ejercicios de manera gráfica usando métodos como (el paralelogramo, el polígono, el triángulo).

En resumen: Las propiedades para la adición de vectores son las siguientes:

Conmutativa	A + B = B + A.
Asociativa	(A + B) + C = A + (B + C).
Elemento Neutro	A + 0 = A.
Elemento Simétrico	A + (-A) = A - A = 0.

Además de aquellos vectores que tienen la misma dirección se sumarán y los que tengan sentidos opuestos se restarán.

Ejemplo 8.- Aplique la ley asociativa (A + B) + C = A + (B + C) para los siguientes vectores A=<3,3>, B=<4,5>, C=<1,3> y grafique.

(A + B) + C
(A + B) = <(3+4) + (3+5)>
(A + B) + C = (7,8) + (1,3)
<(7+1) + (8+3)> = <8,11>
(A + B) + C = <8,11>
= A + (B + C).
A + <(4+1) + (5+3)>
A + (5,8)
(3,3) + (5,8)
<(3+5) + (3+8)>=(8,11)
= A + (B + C) = <8,11>.

Se grafican los vectores A,B y C, en el plano x,y.

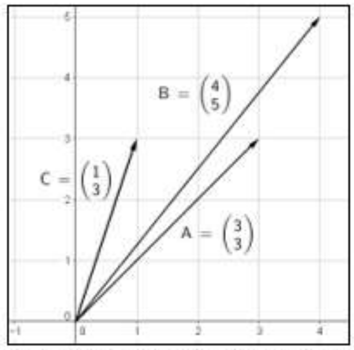


Figura 5.- Representación Gráfica de los vectores A, B, y C.

Si (A + B) + C = A + (B + C) = <8,11>, entonces se procede a graficar el vector resultante.

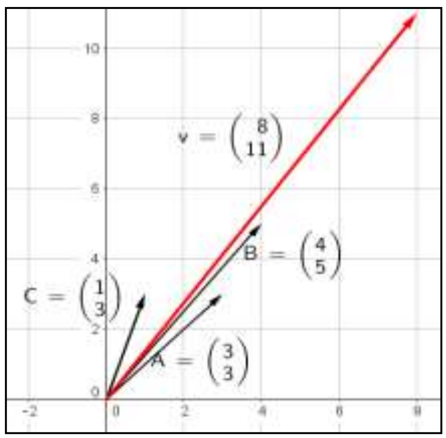


Figura 6

Otra manera de graficar, sería uniendo puntas y colas de vectores (resolución gráfica por el método del polígono), por ejemplo: en donde termina el vector A comienza el B y así sucesivamente (véase figura 7).

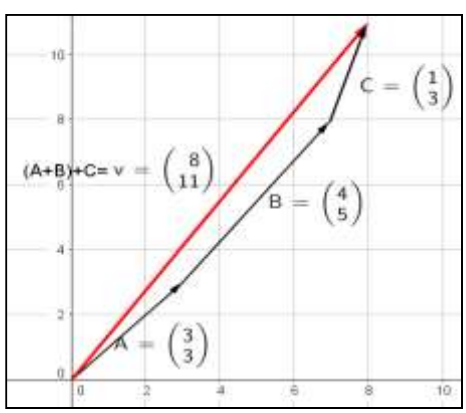


Figura 7

5.4 ÁLGEBRA DE VECTORES

El álgebra vectorial se originó del estudio de los cuaterniones (extensión de los números reales) 1, i, j, y k, así como también de la geometría cartesiana promovida por Gibbs y Heaviside, quienes se dieron cuenta de que los vectores servirían de instrumento para representar varios fenómenos físicos.

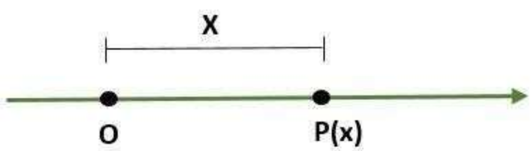
Geométricamente. Los vectores son representados por rectas que tienen una orientación, y las operaciones como suma, resta y multiplicación por números reales.

Analíticamente. La descripción de los vectores y sus operaciones es realizada con números, llamados componentes. Este tipo de descripción es resultado de una representación geométrica porque se utiliza un sistema de coordenadas.

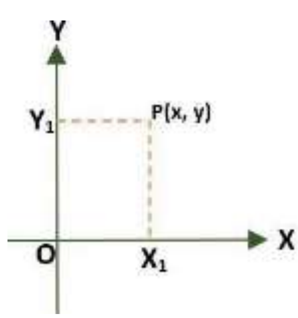
Axiomáticamente. Se hace una descripción de los vectores, independientemente del sistema de coordenadas o de cualquier tipo de representación geométrica.

El estudio de figuras en el espacio se hace a través de su representación en un sistema de referencia, que puede ser en una o más dimensiones. Entre los principales sistemas se encuentran:

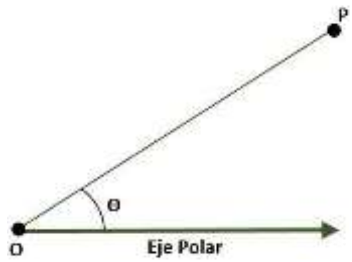
– Sistema unidimensional, que se trata de una recta donde un punto (O) representa el origen y otro punto (P) determina la escala (longitud) y el sentido de esta:



– Sistema de coordenadas rectangulares (bidimensional), que está compuesto por dos rectas perpendiculares llamadas eje x y eje y, que pasan por un punto (O) origen; de esa forma el plano queda divido en cuatro regiones llamadas cuadrantes. En este caso un punto (P) en el plano es dado por las distancias que existen entre los ejes y P.



– Sistema de coordenadas polares (bidimensional). En este caso el sistema es compuesto por un punto O (origen) que es llamado polo y una semirrecta con origen en O llamada eje polar. En este caso el punto P del plano, con referencia al polo y al eje polar, es dado por el ángulo (Ө), que se forma por la distancia que existe entre el origen y el punto P.



– Sistema tridimensional rectangular, formado por tres rectas perpendiculares (x, y, z) que tienen como origen un punto O en el espacio. Se forman tres planos coordenados: xy, xz y yz; el espacio quedará dividido en ocho regiones llamadas octantes. La referencia de un punto P del espacio es dada por las distancias que existen entre los planos y P.

Magnitudes. Una magnitud es una cantidad física que puede ser contada o medida a través de un valor numérico, como en el caso de algunos fenómenos físicos; sin embargo, muchas veces es necesario poder describir esos fenómenos con otros factores que no sean numéricos. Por eso las magnitudes son clasificadas en dos tipos:

Magnitud escalar. Son aquellas cantidades que se definen y representan de forma numérica; es decir, por un módulo junto con una unidad de medida. Por ejemplo:

a) Tiempo: 5 segundos.
b) Masa: 10 kg.
c) Volumen: 40 ml.
d) Temperatura: 40 ºC.

Magnitud vectorial. Son aquellas cantidades que son definidas y representadas por un módulo junto con una unidad, así como también por un sentido y dirección. Por ejemplo:

a) Velocidad: $(5\hat{\imath} - 3\hat{\jmath})$ m/s.
b) Aceleración: 13 m /s^2; S 45º E.
c) Fuerza: 280 N, 120º.
d) Peso: -40 $\hat{\jmath}$ kg-f.

Las magnitudes vectoriales son representadas gráficamente por vectores.

Operaciones con vectores

Existen muchas magnitudes que tienen módulo, sentido y dirección, como aceleración, velocidad, desplazamiento, fuerza, entre otros. Estas son aplicadas en diversas áreas de la ciencia, y para aplicarlas se hace necesario en algunos casos realizar operaciones como suma, resta, multiplicación y división de vectores y escalares.

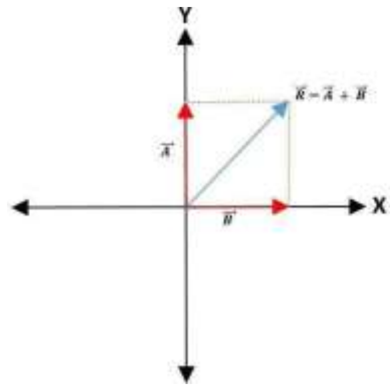
Suma y resta de vectores. La suma y resta de vectores es considerada una sola operación algebraica porque la resta puede ser escrita como una suma; por ejemplo, la resta de los vectores $\bar{A}$ y $\bar{E}$ puede expresarse como:

$$\bar{A} - \bar{E} = \bar{A} + (-\bar{E})$$

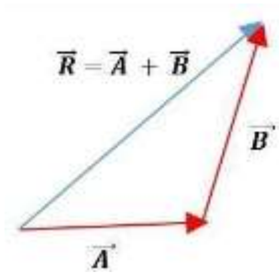
Existen diferentes métodos para realizar la suma y resta de vectores: pueden ser gráficos o analíticos.

Métodos gráficos. Utilizados cuando un vector posee módulo, sentido y dirección. Para ello se trazan líneas que forman una figura que posteriormente ayudan a determinar la resultante. Entre los más conocidos destacan los siguientes:

Método del paralelogramo. Para hacer la suma o resta de dos vectores se elige un punto en común sobre el eje de coordenadas –que representará el punto de origen de los vectores–, manteniendo su módulo, sentido y dirección. Entonces se trazan líneas paralelas a los vectores para formar un paralelogramo. El vector resultante es la diagonal que sale desde el punto de origen de ambos vectores hasta el vértice del paralelogramo:



Método del triángulo. En este método los vectores se colocan uno a continuación el otro, manteniendo sus módulos, sentidos y direcciones. El vector resultante será la unión del origen del primer vector con el extremo del segundo vector:



Métodos analíticos. Se pueden sumar o restar dos o más vectores a través de un método geométrico o vectorial:

Método geométrico. Cuando dos vectores forman un triángulo o paralelogramo, el m[odulo y la dirección del vector resultante puede ser determinado usando la leyes del seno y coseno. Así, el módulo del vector resultante, aplicando la ley del coseno y por el método del triángulo, es dado por:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB * cos\beta}$$

En esta fórmula β es el ángulo opuesto al lado R, y este es igual a 180º - ϴ.
En cambio, por el método del paralelogramo el modulo del vector resultante es:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB * cos\theta}$$

La dirección del vector resultante es dada por el ángulo (α), que forma la resultante con uno de los vectores.

Por la ley del seno, la suma o resta de vectores puede hacerse también por el método del triángulo o paralelogramo, sabiendo que en todo triangulo los lados son proporcionales a los senos de los ángulos apuestos:

$$\frac{\vec{A}}{sen\gamma} - \frac{\vec{B}}{sen\alpha} - \frac{\vec{R}}{sen\beta}$$

Método vectorial. Este se puede hacer de dos formas: en función de sus coordenadas rectangulares o de sus vectores bases. Se puede hacer trasladando los vectores que se van a sumar o restar hacia el origen de coordenadas, y luego se descomponen en sus componentes rectangulares todas las proyecciones en cada uno de los ejes para el plano (x, y) o el espacio (x, y, z); por último, se suman sus componentes algebraicamente. Entonces, para el plano es:

$$\vec{A} = A_x + A_y$$
$$\vec{B} = B_x + B_y$$
$$\vec{R} = [(A_x + B_x);(A_y + B_y)]$$

El modulo del vector resultante es:

$$R = \sqrt{Rx^2 + Ry^2}$$

Mientras que para el espacio es:

$$\vec{A} = A_x + A_y + A_z$$
$$\vec{B} = B_x + B_y + B_z$$
$$\vec{R} = [(A_x + B_x);(A_y + B_y);(A_z + B_z)]$$

El modulo del vector resultante es:

$$R = \sqrt{Rx^2 + Ry^2 + Rz^2}$$

5.4.1 Leyes del álgebra vectorial

Cuando se realizan sumas vectoriales se aplican varias propiedades, que son:

a) Ley Asociativa para la Suma: A + (B + C) = (A + B) + C.
b) Exiastencia del Elemento Cero: A + 0 = 0 + A = A.
c) Existencia de los Negativos: A + (-A) = (-A) + A = 0.
d) Ley Conmutativa para la Suma: A + B = B + A.
e) Ley Distributiva: m (A + B) = mA + mB.
f) Ley Distributiva: (m + n)A = mA + nA.
g) Ley Asociativa: m(nA) = (mn)A.
h) Multiplicación por la Unidad: 1(A) = A.

Multiplicación de vectores. La multiplicación o producto de vectores pudiera realizarse como la suma o resta, pero al hacerlo de esa forma pierde el significado físico y casi nunca se encuentra dentro de las aplicaciones. Por eso, generalmente los tipos de productos más utilizados son el producto escalar y vectorial.

Ejemplo 9.- Aplique la Ley asociativa m(nA) = (mn)A. para el vector A=<2,2> y los escalares m=1, n=3.

m(nA) = 1<3(2,2)> = 1<6,6> = <6,6>
(mn)A = (1*3)(2,2) = 3(2,2) = <6,6>

5.5 PRODUCTO PUNTO DE DOS VECTORES.

Producto escalar. Es conocido también como producto punto de dos vectores. Cuando se multiplican los módulos de dos vectores por el coseno del ángulo menor que se forma entre estos se obtiene un escalar. Para expresar un producto escalar entre dos vectores se coloca un punto entre estos, y este puede definirse como:

$$\vec{A}.\vec{B} = AB * cos\theta$$

El valor del ángulo que existe entre los dos vectores va a depender de si estos son paralelos o perpendiculares; así, se tiene que:

- Si los vectores son paralelos y tienen el mismo sentido, coseno 0º = 1.
- Si los vectores son paralelos y tienen sentidos opuestos, coseno 180º = -1.
- Si los vectores son perpendiculares, coseno 90º = 0.

Ese ángulo también puede ser calculado sabiendo que:

$$\vec{A}.\vec{B} = AB * cos\theta$$
$$\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

Al igualar las ecuaciones se tiene que:

$$AB * cos\theta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

$$cos\theta = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{AB}$$

El producto escalar tiene las siguientes propiedades:

- Propiedad conmutativa: el orden de los vectores no altera el escalar.
- Propiedad distributiva: si se multiplica un escalar por la suma de dos vectores, es igual a la multiplicación del escalar por cada vector.

Producto vectorial. La multiplicación vectorial, o producto cruz de dos vectores A y B, dará como resultado un nuevo vector C y se expresa utilizando una cruz entre los vectores:

$$\vec{A} x \vec{B} = \vec{C}$$

El nuevo vector tendrá sus propias características. De esa manera:

- La dirección: este nuevo vector será perpendicular al plano, que es determinado por los vectores originales.
- El sentido: este se determina con la regla de la mano derecha, donde se gira el vector A hacia el B señalando el sentido de la rotación con los dedos, y con el pulgar se marca el sentido del vector.
- El módulo: es determinado por la multiplicación de los módulos de los vectores AxB, por el seno del ángulo menor que existe entre estos vectores. Se expresa:

$$C = AB * sen\theta$$

El valor del ángulo que existe entre los dos vectores va a depender de si estos son paralelos o perpendiculares. Entonces, es posible afirmar lo siguiente:

- Si los vectores son paralelos y tienen el mismo sentido, seno 0º = 0.
- Si los vectores son paralelos y tienen sentidos opuestos, seno 180º = 0.
- Si los vectores son perpendiculares, seno 90º = 1.

Cuando un producto vectorial es expresado en función de sus vectores bases, se tiene que:

$$\vec{A} x \vec{B} = \vec{C} = (A_y B_z - A_z B_y)\vec{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\vec{k}$$

El producto escalar tiene las siguientes propiedades:

- No es conmutativo: el orden de los vectores altera el escalar.
- Propiedad distributiva: si se multiplica un escalar por la suma de dos vectores, es igual a la multiplicación del escalar por cada vector.

En el plano x, y o espacio dimensional R^2, el producto punto de dos vectores $a=<a_1,a_2>$ y $b=<b_1,b_2>$ es: $a \bullet b = a_1b_1 + a_2b_2$

Mientras que en un espacio tridimensional R^3 el producto punto de dos vectores a=<a1,a2,a3>, y b=<b1,b2,b3> es: $a \bullet b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

Ejemplo 10: El vector a=<2.5, 3.4> y el vector b=<2,2> se encuentran en el plano, calcule el producto punto de estos dos vectores y grafique.

$$a \bullet b = a_1b_1 + a_2b_2$$
$$a \bullet b = <2.5 \bullet 2 + 3.4 \bullet 2>=<5 + 6.8>=11.8$$

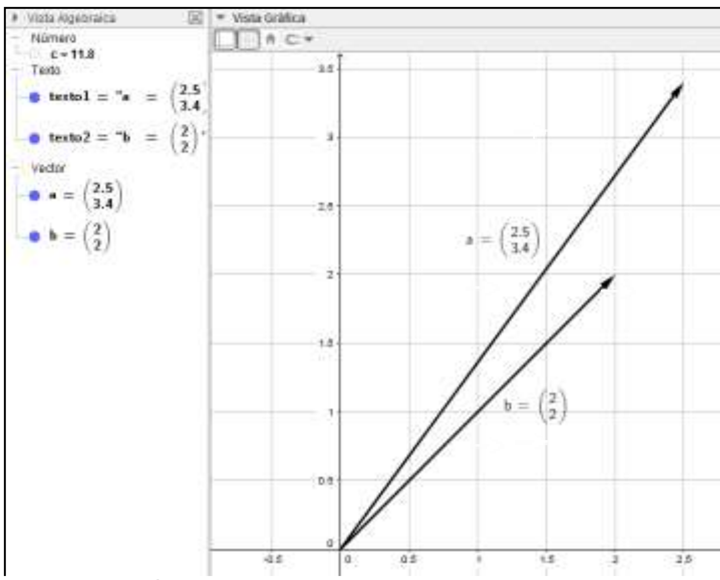


Figura 8.- Gráfica de los vectores a y b y el producto punto de estos dos.

5.6 VECTORES EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

Un vector ***a*** en el espacio en 3 dimensiones es cualquier triada ordenada de números reales: $a=<a_1, a_2, a_3>$ Dónde a_1, a_2, y a_3 son las componentes del vector. El vector posición de un punto $P1<x_1, y_1, z_1>$ en el espacio tridimensional es el vector $\overrightarrow{OP} =< x_1, y_1, z_1 >$, cuyo punto inicial es el origen O y cuyo punto final es P, véase la figura 9.

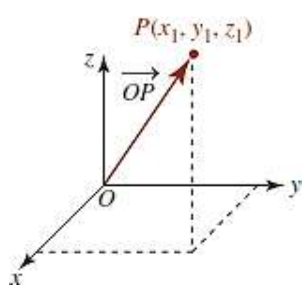


Figura 9.- Representación del vector en 3D.

<u>Ejemplo 11.-</u> El vector a=<2.5, 3.4, 1.2> y el vector b=<2, 2, 2> se encuentran en el plano, calcule el producto punto de estos dos vectores y grafique.

$a \bullet b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

$a \bullet b = <2.5 \bullet 2 + 3.4 \bullet 2 + 1.2 \bullet 2> = <5 + 6.8 + 2.4> = 14.2$

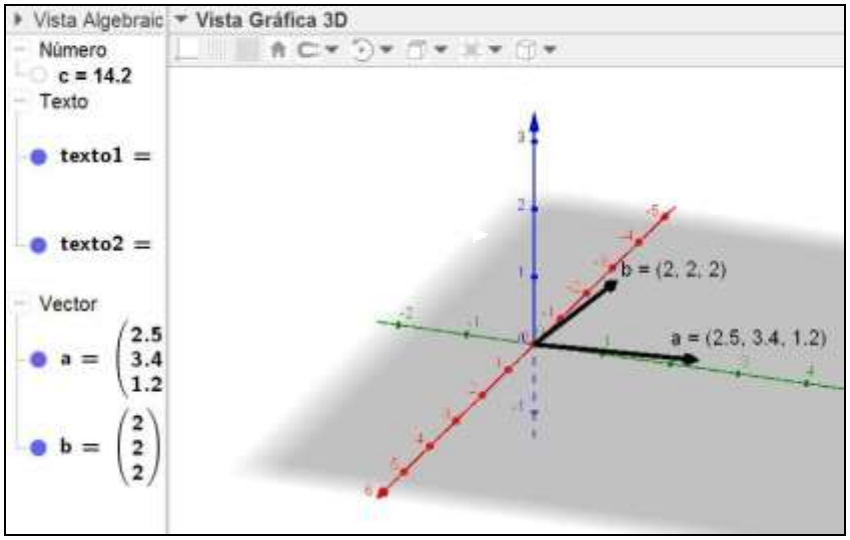


Figura 10.- Gráfica de los vectores a, b y c y el producto punto.

5.6.1 Vectores unitarios (i, j, k).

De igual manera, cualquier vector $a = <a_1, a_2, a_3>$ en el espacio tridimensional se puede expresar como una combinación lineal de los vectores unitarios (véase figura 10).

$$i = <1, 0, 0>,\ j = <0, 1, 0>,\ k = <0, 0, 1>.$$

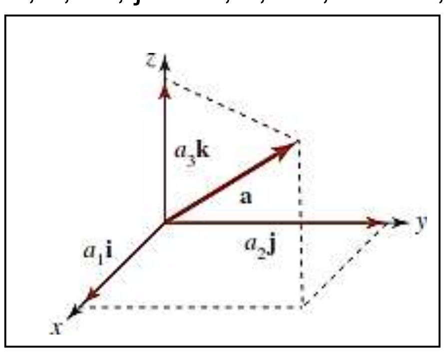


Figura 131.- Representación de los vectores unitarios i, j, k.

5.7 PRODUCTO CRUZ DE DOS VECTORES (PRODUCTO VECTORIAL).

El producto cruz de dos vectores a = <a_1, a_2, a_3> y b = <b_1, b_2, b_3> el vector:

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

Ésta representación, a su vez sugiere que es posible escribir el producto cruz como un determinante de 3 x 3:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)i - (a_1b_3 - a_3b_1)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k$$

Ejemplo 12.- El vector a=<2.5, 3.4, 1.2> y el vector b=<2, 2, 2> se encuentran en el plano, calcule el producto cruz de estos dos vectores y grafique.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2.5 & 3.4 & 1.2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= ((3.4 * 2) - (1.2 * 2))i - ((2.5 * 2) - (1.2 * 2))j + ((2.5 * 2) - ((3.4 * 2))k$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (4.4)i - (2.6)j - (1.8)k$$

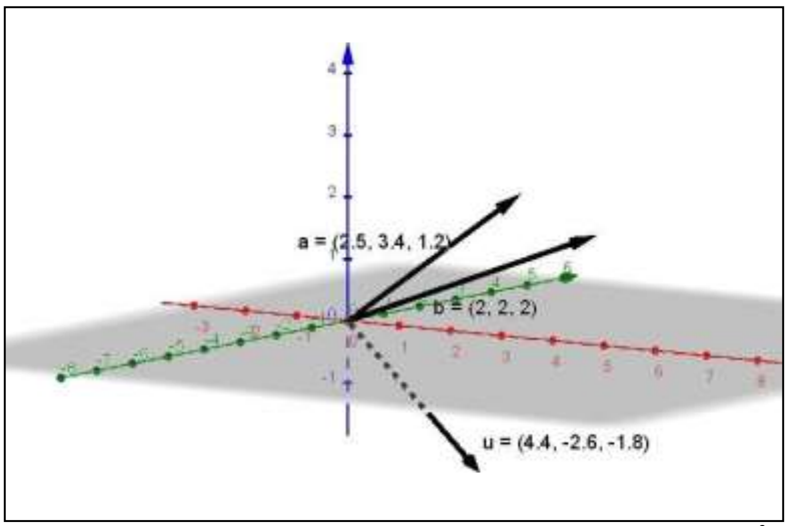


Figura 12.- Representación del producto cruz de los vectores a y b, en un espacio R^3

Problemas Propuestos

a) Convertir la siguiente cantidad de energía de 8.5 Kg*m²/s² a lb*ft²/s².
b) Una fuerza dada 6 lb*ft/s² convertirla a Kg*m/s².
c) Una velocidad de 15 mi/h convertirla a m/s.