PROPEDÉUTICO 2024

TecNM/Cerro Azul

Correo electrónico:
dir_cerroazul@tecnm.mx
Sitio web: cerroazul.tecnm.mx

Tel.: 7858589100
Carretera Tuxpan-Tampico
Km 60 Cerro Azul, Ver.
C.P.92501 postal

OBJETIVO

Proporcionar al estudiante las competencias básicas para facilitar el aprendizaje de las matemáticas del nivel superior a través del desarrollo y aplicación de los principios y teoremas fundamentales.

CARACTERIZACIÓN DEL CURSO

La propedéutica es el conjunto de saberes necesarios para preparar el estudio de una materia, ciencia o disciplina. Es la etapa previa a la metodología (conocimiento de los procedimientos y técnicas necesarios para investigar en un área científica). En la mayor parte de las instituciones educativas, los estudios de nivel superior y de posgrado (maestría y doctorado) incluyen un curso propedéutico.

Este curso propedéutico Involucra también los conceptos de preparación y adiestramiento, por tanto, podemos afirmar que la propedéutica es el estudio previo de los fundamentos o prolegómenos de lo que luego se enseñará con mayor extensión y profundidad, a manera de introducción en una disciplina. Aporta los conocimientos teóricos y prácticos necesarios, imprescindibles y básicos de una materia, que necesita el estudiante para llegar a entenderla durante su estudio profundo y ejercerla después.

El Tecnológico Nacional de México/Instituto Tecnológico de Cerro Azul, a través del departamento académico de Ciencias Básicas ha realizado una revisión y actualización de los contenidos del curso Propedéutico que se han venido impartiendo, reestructurando el programa general del curso e implementando una serie de ejercicios propuestos al final de cada unidad, con la finalidad de que el estudiante de nuevo ingreso reafirme los conocimientos adquiridos en el aula durante el desarrollo del curso.

Tabla de contenido

UNIDAD I. USO DE LA CALCULADORA CIENTÍFICA.

1.1 Introducción

Existen varios tipos de "calculadoras".

La **básica**, que cuenta con las 4 operaciones fundamentales y algunas veces raíz cuadrada, esta se usa para cálculos sencillos.

La **sumadora**, tiene los mismos operadores que la básica, pero cuenta con teclas para subtotal y total, principalmente usadas en cajas registradoras o por los contadores, ya que por lo regular imprimen en una tira de papel los resultados.

La **Científica**, además de las funciones básicas, tiene paréntesis, funciones trigonométricas, logarítmicas etc., y su uso es más común en estudiantes de matemáticas y física. Pero para hacer buen uso de esta última es necesario conocer la manera correcta de escribir los cálculos en ella, ya que si no se tiene ese conocimiento nos puede hacer caer en errores y/o pérdida de tiempo.

Encender, borrar y apagar una calculadora científica es fundamental para su uso. Aquí tienes las instrucciones:

Encendido: Para encender la calculadora, busca la tecla que dice "ON" o "AC" (dependiendo del modelo). Presiónala y la calculadora se activará.

Borrado: Si deseas borrar todos los cálculos o restablecer la pantalla, utiliza la tecla "AC" (All Clear). Esta tecla también puede estar etiquetada como "C" o "CLR". Al presionarla, se eliminarán los valores y operaciones previas.

Apagado: Para apagar la calculadora, presiona la tecla "OFF". En algunos modelos, debes presionar la tecla "SHIFT" o "2ND" antes de "OFF". Esto evitará que la calculadora se encienda accidentalmente.

1.2 Uso Mode (FIX, DEG, RAD, GRA, COMP, SCI, NORM, SD)

El **modo** en las calculadoras científicas es una función importante que permite personalizar su comportamiento y ajustar la forma en que se muestran los resultados. Aquí tienes una explicación general de los modos más comunes: Los distintos modos (MODE) que tiene una calculadora.

FIX = Permite elegir el número de decimales en pantalla (0 a 9).

DEG = GRADOS SEXAGESIMALES.

RAD = RADIANES.

GRA = GRADOS CENTESIMALES.

COMP = Modo para operaciones aritméticas básicas

SCI = Expresa el número en notación científica. Permite elegir las cifras significativas.

NORM = Modo normal. Los números se expresan con todas las cifras.

SD = Se usa para cálculos estadísticos.

1.3 Operaciones Básicas

Las operaciones básicas de cualquier calculadora son 4:

- Suma: tecla +
- Resta: tecla -
- Multiplicación: tecla x o *
- División: tecla ÷ o /

Actividades:

Realiza las siguientes operaciones, presionando en secuencia las teclas en la calculadora (de izquierda a derecha) y comprueba el resultado.

Operaciones	Resultado
15 + 12 =	27
12 x12 =	144
27 ÷ 3 =	9
2 x 5 x 4 =	40
23 + 45 – 9 =	59

En este ejercicio las operaciones se van realizando conforme van apareciendo de izquierda a derecha. En el ejemplo 23 + 45 – 9, primero se realiza la suma 23 + 45 = 68, y con este resultado se hace la siguiente suma 68 – 9, dando como resultado 59.

En la calculadora no es necesario presionar varias veces el =, sino que ella misma va haciendo los resultados parciales internamente y entrega el resultado final al presionar la tecla =

1.4 Cambio de Signo

Muchas de las operaciones que realizamos, pueden ir acompañadas de números negativos y será necesario cambiar el signo al distinto número que lo necesiten para realizar correctamente la operación. Para ello se pulsa la tecla **+/-.**

Ejemplo

Para cambiar de signo el numero 2

Operación	Pantalla
2 +/-	-2

Efectúa ahora 23 x (-12)

Operación Pantalla

23 x 12+/- -276

1.5 Jerarquía de operaciones (Paréntesis)

Si en una expresión algebraica están presentes una suma y una multiplicación primero será efectuado el cálculo de la multiplicación y posteriormente la suma.

Operación	R	Observaciones
2 + 3 x 4 =	14	Véase que la operación que se realiza primero es 3 * 4, porqué la multiplicación es de mayor prioridad que la suma. 2 + 12 = 14
8 + 5 + 7 *4 =	41	Primero la multiplicación 7 * 4, después las sumas, 8 + 5 + 28 = 41
2 * 7 + 4 * 9 =	50	En este caso hay dos multiplicaciones, primero se realiza la que está a la izquierda 2 * 7, después la otra 4 * 9 y por último se realiza la suma 14 + 36 = 50

En una expresión primero se realiza la operación de mayor prioridad o jerarquía. En el caso de haber varios operadores de igual jerarquía, estas

operaciones se van realizando de izquierda a derecha (según el orden de aparición).

1.5.1 Paréntesis

Son los de más alta prioridad y cualquier expresión o subexpresión que esta encerrada entre paréntesis tendrá automáticamente la mayor prioridad y por lo tanto se realizará primero.

Ahora resolveremos expresiones usando los paréntesis:

Expresión	Secuencia de teclas en la calculadora	Resultado
$\frac{8+2}{4} =$	$(8+2) \div 4 =$	2.5
$\dfrac{4 \times 3 + 5 \times 2}{5} =$	$(4 \times 3 + 5 \times 2) \div 5 =$	4.4
$\dfrac{9 \times 8 + 7 \times 6}{2 \times 3 + 4 \times 5} =$	$(9 \times 8 + 7 \times 6) \div (2 \times 3 + 4 \times 5)$	1.153846154

Para lograr que en la expresión 1, primero se realice la suma, esa subexpresión la encerramos entre paréntesis $(8 + 2)$ logrando con esto que primero se haga lo que contiene el paréntesis y con el resultado de 10 después se hace la división, $10 \div 4 = 2.5$

En la expresión 2, las multiplicaciones 4×3 y 5×2 tienen mayor prioridad que la suma así que se realizaran primero, la división se tiene que realizar después que la suma, pero como la división es de mayor prioridad, la expresión en el numerador se encierra entre paréntesis.

$(4 \times 3 + 5 \times 2)$ Resultado 22 después con este resultado $22 \div 5 = 4.4$

Actividades: Haciendo uso de la jerarquía en las operaciones, resuelve los siguientes ejercicios.

1. $(7 + 2) \times (3 + 8) =$
2. $12 \div 3(1 + 1) =$
3. $9 - 6 \div (4 \times 3) - 1 =$
4. $[(5 - 2) \div 3 - 1] \times 4 =$
5. $4 \times 2 - 3 \div (1 + 3) =$

1.6 Fracciones

1.6.1 Fracciones simples y Fracciones Parciales

El proceso para introducir fracciones en la calculadora es simple, pero primero tenemos que clasificarlos en dos tipos:

- Fracción simple. Unos ejemplos: Un medio, un cuarto, tres octavos $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}$.

- Número mixto (está compuesto de un entero y fracción simple). Unos ejemplos: Dos enteros tres cuartos, cinco enteros siete treintaidosavos, un entero y dos tercios $2\frac{3}{4}, 5\frac{7}{32}, \mathbf{1\frac{2}{3}}$

1.6.2. Cómo se introducen las fracciones en la calculadora

Para teclear una fracción simple en la calculadora, primero se escribe el numerador luego la tecla a b/c y después el denominador. Ej. 3 a b/c 4

Para teclear un número mixto, primero se escribe el entero, luego la tecla a b/c después el numerador seguido de la tecla a b/c y por último el denominador.

Ej. 2 ⌟ 5 ⌟ 8

En la siguiente tabla están unos ejemplos de cómo se teclean las fracciones:

Fracciones	Secuencia de teclas en la calculadora	Se ve asi
$\frac{1}{2} =$	1 a b/c 2	1 ⌟ 2
$\frac{5}{32} =$	5 a b/c 32	5 ⌟ 32
$1\frac{3}{4} =$	1 a b/c 3 a b/c 4	1⌟3⌟4
$5\frac{7}{32}$	5 a b/c 7 a b/c 32	5⌟7⌟32

1.6.3. Operaciones con fracciones

Las operaciones que se pueden realizar con fracciones (y que el resultado sea una fracción) son:

- Suma: tecla +
- Resta: tecla -
- Multiplicación: tecla ×
- División: tecla ÷
- Reciproco tecla x^{-1}
- Potencias tecla x^2, x^3 (algunas calculadoras no tienen el cubo)

Ejemplos:

Fracciones	Secuencia de teclas en la calculadora	Se ve asi
$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=$	1 [ab/c] 2 + 1 [ab/c] 4 =	3 ┘ 4
$\frac{\frac{1}{2}+2\frac{3}{4}}{\frac{1}{8}+\frac{1}{12}}=$	(1 [ab/c] 2 + 2 [ab/c] 3 [ab/c] 4) ÷ (1 [ab/c] 8 + 1 [ab/c] 12) =	15 ┘ 3 ┘ 5
$\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{7}\right)^{-1}=$	(1 [ab/c] 4 + 3 [ab/c] 7) x^{-1} =	1 ┘ 9 ┘ 19
$\frac{2^2}{3}+\frac{1^2}{4}+\frac{1^2}{3}$	(2 [ab/c] 3) x^{-2} + (1 [ab/c] 4) x^{-2} + (1 [ab/c] 3) x^{-2} =	89 ┘ 144
$2\frac{3}{4}+1\frac{5}{8}+\frac{7}{32}$	2 [ab/c] 3 [ab/c] 4 + 1 [ab/c] 5 [ab/c] 8 + 7 [ab/c] 32=	4 ┘ 19 ┘ 32
$\frac{\frac{1}{2}+3\frac{3}{4}-4\frac{5}{7}}{\frac{1}{4}+2\frac{5}{8}+\frac{4}{3}}=$	(1 [ab/c] 2 + 3 [ab/c] 3 [ab/c] 4 - 4 [ab/c] 5 [ab/c] 7)÷(1 [ab/c] 4 + 2 [ab/c] 5 [ab/c] 8+4 [ab/c] 3)=	-78 ┘ 707

1.7. Expresiones con raíces y potencias

Algunos ejemplos de cómo se teclean expresiones con raíces y potencias

- $\sqrt[2]{7}$ Primero la tecla $\sqrt[2]{x}$, después el 7 y terminar con =
- $\sqrt[3]{6}$ Primero $\sqrt[3]{x}$, después el 6, y terminar con =
- 4^2 Primero el 4, después la tecla x^2 y terminar con =
- 2^3 Primero el 2, después la tecla x^y, luego el 3 y terminar con =
- $\sqrt[5]{32}$ Primero el 5, después la tecla $\sqrt[x]{y}$ y luego el 32 y terminar con =

Las potencias o raíces tienen un nivel de jerarquía mayor que la multiplicación y división. Así que en la secuencia 2 ÷ $(3)^2$=, primero se realiza el cuadrado de 3 y después la división, 2 ÷ 9 =.

Así como en $2 \div \sqrt[3]{8}$ =, primero se obtiene la raíz cúbica de 8 y después la división.

Ejemplos

Expresión	Secuencia de teclas	Resultados
$\mathbf{2^2 + 3 * 4^2}$	$2x^2 + 3 * 4x^2$	52
$\sqrt{3^2 + 4^2}$	$\sqrt{x}(3x^2 + 4x^2)$	5
$\dfrac{-9 + \sqrt{9^2 - 4 * 3 * 4}}{2 * 3}$	$(-9 + \sqrt[2]{x}(9x^2 - 4 * 3 * 4)) \div (2 * 3)$ (el signo – del 9, se hace con la tecla especial (-))	-0.542572892
$\dfrac{\sqrt[3]{8} + \sqrt{4}}{2^3 + 3^2}$	$(3 \sqrt[x]{y}\, 8 + \sqrt[2]{x}\, 4) \div (2x^y 3 + 3x^2)$	0.235294117
$\dfrac{\frac{1}{4} + \sqrt{2^3 + 3^2}}{\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}$	$\dfrac{1 \div 4 + \sqrt[2]{x}\,(2x^y 3 + 3x^2)}{(1 \div 2 + 2 \div 3)x^y(3 \div 2)}$	3.470322074

Actividades:

Resuelve con la calculadora cada expresión y comprueba el resultado.

Expresión	Resultados
$\mathbf{2^2 + 3 * 4^3}$	
$\sqrt{9^2 + 16^2}$	
$\dfrac{-5 + \sqrt{9^2 + 4 * 2^3}}{2 * 3^2 + 5}$	
$\dfrac{\sqrt[3]{8} + \frac{\sqrt{6}}{2}}{2^2 + 3^3}$	
$\dfrac{2 + \sqrt{\frac{2^3}{7} + 3^2}}{\left(\frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^3}\right)^{\frac{2}{3}}}$	

1.8. Notación exponencial

Primero una breve explicación de la notación. Vamos a suponer que tenemos el número 357, aunque no lo escribamos el punto decimal esta delante del 7, si el 357 lo dividimos entre 10 el resultado es 35.7, o sea que la coma se mueve un digito a la izquierda. Si lo volvemos a dividir entre 10 nos da 3.57, la coma se mueve otra posición a la izquierda, entonces podemos concluir que cada vez que dividimos un numero entre 10 la coma se desplaza una posición a la izquierda.

De manera similar ocurre cuando multiplicamos por 10, pero aquí la coma se mueve a la derecha.

La notación exponencial se compone de dos partes una es la mantisa y la otra el exponente, ejemplo 2 EXP 3, el 2 es la mantisa y el 3 es el exponente, el 2 es el valor y el 3 nos indica la posición del punto 3 decimales a la derecha del 2, es decir que 2 exp 3 = 2000.

Ejemplo

Expresión Matemática	Secuencia de teclas	valor
2×10^3	2EXP3	2000
2.1×10^3	2.1EXP3	2100
4.125×10^6	4.125EXP6	4125000
2×10^{-3}	2EXP-3	0.002
1.125×10^{-5}	1.125EXP-5	0.00001125

Actividades:

Resuelve con la calculadora cada expresión y comprueba el resultado.

Expresión Matemática	valor
$2.5 \times 10^3 + 9.5 \times 10^4$	
2.1×10^3	
4.125×10^6	
2×10^{-3}	
1.125×10^{-5}	

1.9. Expresiones trigonométricas

Las funciones trigonométricas son tres: Seno (sin) Coseno (cos) Tangente (tan) y sus respectivas trigonométricas inversas, que casi siempre están en una segunda función de la tecla, de manera que hay presionar antes [2nd] o [Shift] o [Inv].

Al trabajar con ángulos, hay que definir antes de hacer los cálculos las unidades en que serán dados los ángulos, hay tres opciones:

- Grados sexagesimales: Los que usamos normalmente de 0 a 360, el ángulo recto es de 90 grados.
- Radianes: Estos van de 0 a 2π, su uso es en expresiones en donde el ángulo además de ser argumento de la función es factor ejemplo:

$2\cos(2x)$ En esta expresión el ángulo x deberá estar en radianes.

- Grados centesimales: Estos son de poco uso van de 0 a 400, el ángulo recto es de 100.

Todos los ejemplos en este curso serán en grados sexagesimales, en todas las calculadoras hay un indicador en la pantalla, deg, rad, gra, D R G.

1.10. Uso de la memoria

La memoria de una calculadora es una característica útil para almacenar valores temporales o resultados intermedios durante cálculos. Aquí hay algunas cosas que debes saber sobre el uso de la memoria en una calculadora:

Memoria de variables: Algunas calculadoras permiten almacenar valores en variables. Puedes asignar un valor a una letra o símbolo específico (por ejemplo, “A” o “x”) y luego recuperarlo más tarde. Esto es útil para ecuaciones o fórmulas que involucran la misma cantidad repetidamente.

Memoria de resultados: Muchas calculadoras tienen una función de memoria de resultados. Después de calcular una expresión, puedes almacenar el resultado en la memoria. Luego, puedes usar ese valor en cálculos posteriores sin tener que volver a escribirlo.

Operaciones de memoria:

Guardar en memoria: Para almacenar un valor en la memoria, generalmente presionas una tecla como “M+” o “STO”.

Recuperar de memoria: Para usar un valor almacenado en la memoria, presionas una tecla como “MR” o “RCL”.

Borrar memoria: Si deseas borrar un valor almacenado, busca una tecla como “MC” o “CLR”.

Uso responsable: Recuerda que la memoria de la calculadora es limitada. Siempre borra valores innecesarios para liberar espacio y evitar confusiones.

1.11. Uso de la inversa

La tecla 1/X cambia el número ingresado previamente por su inverso.

Por ejemplo: 4 1/X = 0.25

1.12. Conversión de Rectangular a Polar. Conversión de Polar a Rectangular.

Para convertir coordenadas rectangulares (x, y) a coordenadas polares (r, θ), se utilizan las siguientes fórmulas:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \text{ (en radianes o grados)}$$

Donde r es la distancia desde el origen al punto y θ es el ángulo desde el eje x positivo hasta el punto.

- Para desarrollar esta operación en la calculadora oprime $\boldsymbol{SHIFT} + \boldsymbol{POL}(\mathbf{3}, \mathbf{60}) =$ y en la pantalla aparece $\boldsymbol{Pol}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

  Ejemplo:

  P= (3, 5)

$r = 5.831 \quad \theta = 59.036$

Para convertir coordenadas polares (r, θ), a coordenadas rectangulares (x, y) se utilizan las siguientes fórmulas:

$$X = r\,\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta}$$

$$\mathrm{Y} = \mathrm{r}\,\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\theta}$$

EJEMPLO: Convertir a rectangular la coordenada polar (8, 25), en la calculadora oprime $\boldsymbol{SHIFT} + \boldsymbol{REC}(\mathbf{8}, \mathbf{25})$ y en la pantalla aparece $\boldsymbol{Rec}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

Ejemplo en calculadora:

$$\boldsymbol{SHIFT} + \boldsymbol{REC}(\mathbf{8}, \mathbf{25})$$

$$X = 8\,\mathbf{cos}\,\mathbf{25} = 7.250$$

$$\mathrm{Y} = 8\,\mathbf{sin}\,\mathbf{25} = 3.380$$

Actividades: Usando la calculadora, convierte los ejercicios del 1 al 5 en coordenada polar y del 6 al 10 convertir a coordenada rectangular.

1. P_1= (5,8)
2. P_2= (8,7)
3. P_3= (6,7)
4. P_4= (4,5)
5. P_5= (9,2)
6. r_1= (10,60)
7. r_2= (8,75)
8. r_3= (5,45)
9. r_4= (4,50)
10. r_5= (9,20)

UNIDAD II. ARITMÉTICA

2.1 Operaciones básicas con punto decimal

Las operaciones básicas con punto decimal son fundamentales en matemáticas y se aplican en diversas situaciones cotidianas y profesionales. Estas operaciones incluyen la suma, resta, multiplicación y división de números decimales. Comprender cómo realizar estas operaciones correctamente es esencial para trabajar con medidas precisas, realizar cálculos financieros, interpretar datos científicos y más. A continuación, se presenta una introducción a cada una de estas operaciones:

SUMA: Para sumar números decimales, se escriben los números en columna de modo que coincidan las unidades del mismo orden y posteriormente si sumas como si fueran números naturales y se pone el punto en el resultado bajo la columna que separa los enteros de los decimales. (Es decir, se ponen los puntos en línea).

Ejemplo: Sumar 3.286 + 15.32 + 1.635 + 12

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & 3 & . & 2 & 8 & 6 \\
 & 1 & 5 & . & 3 & 2 & \\
 & & 1 & . & 6 & 3 & 5 \\
+ & 1 & 2 & & & & \\
\hline
 & 3 & 2 & . & 2 & 4 & 1
\end{array}
$$

RESTA: Para restar números decimales, se escriben los números en columna de modo que coincidan las unidades del mismo orden y posteriormente se restan como si fueran números naturales, con la precaución de tener mayor el minuendo que el sustraendo y se pone el punto en el resultado bajo la columna que separa los enteros de los decimales.

Ejemplo:

$$12.\ 4 - 7.159 \quad =$$

Se ordenan los números en columna

$$\begin{array}{r} 12.400 \\ -\ 7.159 \\ \hline 5.241 \end{array}$$

MULTIPLICACIÓN: Para multiplicar números decimales se multiplican los números como si fueran enteros y al producto se le separan las cifras decimales de derecha a izquierda, tantas cifras decimales como tengan los factores. Se suma la cantidad de dígitos decimales con los factores y se coloca el punto en el producto contando esa cantidad de dígitos de derecha a izquierda. Ejemplo:

Multiplicar 1.32 x 3.7

$$\begin{array}{r} 1.32 \\ \times\ 3.7 \\ \hline 924 \\ 396 \\ \hline 4.884 \end{array}$$

DIVISION: Dividimos como siempre, cuando ya no nos quedan cifras para bajar en el dividendo, colocamos un punto en el cociente. Bajamos un cero del dividendo y seguiremos haciendo la división. Bajaremos tantos ceros como cifras decimales queramos en el cociente.

Ejemplo: **Dividir 47 entre 3**

$$\begin{array}{r|l} & 15.66 \\ \hline 3 & 47 \\ & 17 \\ & \ \ 20 \\ & \ \ \ \ 20 \end{array}$$

Actividades: Organizando las operaciones con decimales, resuelve los siguientes ejercicios propuestos en tu cuaderno.

1. $7.92 + 9.91 =$
2. $15.4 + 0.745 =$
3. $2.93 + 4.17 =$
4. $0.152 + 0.873 =$
5. $6.33 + 0.73 =$
6. $0.394 - 0.531 =$
7. $0.394 - 0.531 =$
8. $7.171 - 3.267 =$
9. $6.214 - 2.348 =$
10. $8.248 - 1.579 =$
11. $5.241 \times 2.341 =$
12. $3.915 \times 1.240 =$
13. $2.465 \times 6.176 =$
14. $9.417 \times 7.182 =$
15. $0.25 \times 1.480 =$
16. $43 \div 3 =$
17. $27 \div 7 =$
18. $33 \div 4 =$
19. $49 \div 6 =$
20. $71 \div 7 =$

2.2 Operaciones básicas con fracciones

2.2.1. Suma de fracciones.

Para la solución de fracciones que contienen diferente denominador es necesario apoyarse en el mínimo común múltiplo. El mínimo común múltiplo (m.c.m.) **es el número positivo más pequeño que es múltiplo de dos o más números**.

Ejemplo. Mínimo común múltiplo de 3 y 4

3	4	2
3	2	2
3	1	3
1	1	

El m.c.m es **2*2*3=12**

Para sumar fracciones con diferente denominador, se deben de seguir los siguientes pasos:

1. Encontrar el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los denominadores.
2. Convertir las fracciones a equivalentes que tengan el mismo denominador.
3. Sumar los numeradores.
4. Presentar el resultado en fracción mixta o impropia.

Ejemplo:

Si se quiere sumar

$\frac{1}{3}\, y\, \frac{1}{4}$

el m.c.m. de 3 y 4 es 12.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3} * \frac{4}{4} + \frac{1}{4} * \frac{3}{3} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{4+3}{12} = \mathbf{\frac{7}{12}}$$

Resta de fracciones.

Para restar fracciones, hay dos casos:

Tienen el mismo denominador. Se restan los numeradores y se deja el denominador común.

Ejemplo 1:

$$\frac{7}{12} - \frac{1}{12} = \frac{7-1}{12} = \mathbf{\frac{6}{12}}$$

b) Tienen denominador diferente. Entonces, hay que amplificar las fracciones para que tengan el mismo denominador y luego sumar.

Fórmula típica para la resta:

$$\frac{a}{\mathrm{b}} - \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}} = \frac{\mathrm{ad}}{\mathrm{bd}} - \frac{\mathrm{bc}}{\mathrm{bd}} = \frac{\mathrm{ad} - \mathrm{bc}}{\mathrm{bd}}$$

Observación: No hace falta amplificar las fracciones para que el denominador resultante sea producto de los denominadores de las fracciones iniciales. Basta con tomar el m.c.m. de los denominadores:

$$\frac{7}{8} - \frac{5}{12} = \frac{3(7) - 2(5)}{24} = \frac{21 - 10}{24} = \frac{11}{24}$$

Producto de fracciones.

Para multiplicar dos fracciones, basta multiplicar los numeradores por una parte y los denominadores por otra:

Fórmula para el producto:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} = \frac{ac}{bd}$$

Ejemplo:

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{3 \times 5}{4 \times 2} = \frac{15}{8}$$

Cociente de fracciones:

En el cociente de fracciones, el numerador de la fracción resultante es el producto del numerador de la fracción dividendo por el denominador de la fracción divisor, mientras que el denominador es igual al denominador de la fracción dividendo multiplicado por el numerador de la fracción divisor. Otra manera de imaginarlo es que dividir entre un número es lo mismo que multiplicar por el inverso de ese número, por lo que el cociente entre dos fracciones es igual al producto de la primera fracción por el inverso de la segunda:

Fórmula para el cociente:

$$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} \div \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}} = \frac{\mathrm{a} \times \mathrm{d}}{\mathrm{b} \times \mathrm{c}}$$

Ejemplo

$$\frac{5}{7} \div \frac{2}{3} = \frac{5 \times 3}{7 \times 2} = \frac{15}{14}$$

Actividades: Resuelve los siguientes ejercicios aplicando la solución de las fracciones, según corresponda a cada caso.

1. $\frac{4}{5}+\frac{1}{6}=$
2. $\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=$
3. $\frac{1}{8}+\frac{3}{10}=$
4. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=$
5. $\frac{4}{5}-\frac{3}{6}=$
6. $\frac{7}{8}-\frac{3}{8}=$
7. $\frac{9}{5}\times\frac{3}{4}=$
8. $\frac{1}{2}\times\frac{1}{7}=$
9. $\frac{1}{2}\div\frac{3}{5}=$
10. $\frac{5}{8}\div\frac{1}{3}=$

2.3 Jerarquía de las operaciones

La jerarquía de operaciones es un concepto fundamental en matemáticas para resolver expresiones numéricas de manera efectiva. Comprender y aplicar la jerarquía de operaciones es muy importante para resolver operaciones matemáticas de forma correcta, evitando errores comunes y asegurando resultados precisos.

Es imprescindible para entender y resolver correctamente expresiones algebraicas y ecuaciones.

2.3.1 ¿Qué es la jerarquía de operaciones?

La jerarquía de operaciones es la regla que establece el orden en el que se deben realizar las operaciones matemáticas cuando aparecen varias en una misma expresión. Suele recibir también el nombre de operaciones combinadas. La jerarquía de operaciones asegura que éstas se realicen en el orden correcto para obtener el resultado esperado.

Esta orden evita que haya más de una interpretación en las operaciones, ya que en las matemáticas sólo existe una respuesta correcta. Por ejemplo:

3 + 2 × 5 = 25 ×

3 + 2 × 5 = 13 👍

2.3.2 ¿Cómo se aplica la jerarquía de operaciones?

Para utilizar correctamente la jerarquía de operaciones existen cuatro pasos que se deben aplicar en todas las expresiones numéricas y así obtener el resultado correcto. Revisa paso a paso el proceso que te explicamos aquí.

1. Signos

El primer paso para resolver una expresión matemática de acuerdo con la jerarquía de operaciones es eliminando todos los signos de agrupación:

Llaves { }

Corchetes [ ]

Paréntesis ( )

La manera correcta de resolver las expresiones que usan estos signos es de adentro hacia afuera. Los encontrarás en el siguiente orden.

Resolvamos el siguiente ejemplo para aprender cómo funciona:

$$9-\{6+[5-3+(6-2)]+8(4-7)\}$$

Primero, se deben resolver las operaciones dentro de los paréntesis:

$$9-\{6+[5-3+4]+8(-3)\}$$

Ahora, continuamos con los corchetes:

$$9-\{6+6+8(-3)\}$$

El único paréntesis que nos queda es el -3, pero porque este debe multiplicarse por el 8 antes de eliminar las llaves:

$$9-\{6+6-24\}$$

$$9-\{12-24\}$$

$$9-\{-12\}$$

Para este último paso, el -12 cambiará de signo, debido al menos que existe un negativo fuera de los signos de agrupación:

$$\mathbf{9+12 = 21}$$

2.3.3 Potencias y raíces

Una vez eliminados las operaciones con signos de agrupación, el siguiente nivel en la jerarquía de operaciones son las potencias y raíces.

Vamos un ejemplo sencillo:

$$(6^2+\sqrt{81}) + (4^3-5^2) =$$

El primer paso es resolver las potencias y las raíces:

$$(36 + 9) + (64-25)$$

Ahora, como se explicó antes, toca las operaciones dentro de los paréntesis, al mismo tiempo que estos se eliminan:

$$45 + 39 = \mathbf{84}$$

2.3.4 Multiplicaciones y divisiones

Para continuar con el orden de la jerarquía de operaciones, en una expresión algebraica el tercer nivel son las multiplicaciones y divisiones.

A diferencia de los niveles anteriores, donde la dirección en que se resolvían las expresiones no afectaba el resultado, a partir de aquí debes recordar que todo se hace de izquierda a derecha.

revisa el siguiente ejemplo:

$$4\times2(3+6) \div2 =$$

$$4\times2\times9\div2 =$$

Recuerda, primero se realizan las operaciones de la izquierda y avanza hacia la derecha:

$$8\times9\div2 =$$

$$72\div2 = \mathbf{36}$$

2.3.5 Sumas y restas

Finalmente, el último paso de la jerarquía de operaciones es la resolución de las sumas y restas.

Fíjate cómo se resolvió el siguiente ejercicio:

$$3^2 - 20 + (5 \times 4) \div 2 =$$

Paso 1: Signos de agrupación (paréntesis):

$$3^2 - 20 + 20 \div 2 =$$

Paso 2: Potencias:

$$9 - 20 + 20 \div 2 =$$

Paso 3: Multiplicaciones y divisiones

$$9 - 20 + 10 =$$

Paso 4: Sumas y restas

$$-11 + 10 = \mathbf{-1}$$

Actividades: Resuelve los siguientes ejercicios aplicando la jerarquía de las operaciones.

1. $5 + (3 + 1)2 =$
2. $5\,x\,42 - 8\,x\,2 + 5 =$
3. $5\,(22 - 5) + 4\,x\,32 - 15\,x\,2 =$
4. $5 + [-2\,(-1 + 3)\,]2 =$
5. $4 - 2\,[\,5 - 2\,(4 - 2)]\,/\,2 =$
6. $4\,[\,1 - (5 - 11)\,/\,3] =$
7. $15 - 23 - \sqrt{100} \div 2\,x\,5 + 3\,x\,2 - 43 - 3 + 8 - 2\,x\,3 =$
8. $9 - 6 + [5 - 3 + (6 - 2)] + 8(4 - 7) =$
9. $4\,[\,5 - 10 + (5 - 6 \div 2) * 4] + 6 =$

UNIDAD III. ALGEBRA

3.1. Conceptos Básicos (Conceptos Álgebra, Lenguaje Algebraico, Término, Expresión Algebraica)

El **álgebra** es la parte de las matemáticas que se centra en el estudio de las estructuras y reglas generales que gobiernan las operaciones aritméticas y las relaciones numéricas. En esta, no se trabaja con números específicos, sino que se utilizan símbolos y letras para representar cantidades desconocidas o variables.

El **lenguaje algebraico**, es la forma de las matemáticas que escribimos con letras, números, potencias y signos. Al número le llamamos coeficiente, a la letra o letras les llamamos parte literal y al exponente le llamamos grado. Valor número de una expresión algebraica.

Ejemplo: **El doble de un número** = 2x

La “x” representa un numero desconocido.

Un **término** es una expresión algebraica elemental donde se encuentran solo operaciones de multiplicación y división de números y letras. El número se llama coeficiente y las letras conforman la parte literal. Tanto el número como cada letra pueden estar elevados a una potencia.

Ejemplo: $-5x^3$

Las **expresiones algebraicas** son combinaciones de números, variables y operaciones matemáticas, como la suma, resta, multiplicación y división. Se representan mediante símbolos y letras, donde los números se consideran constantes y las letras representan variables, es decir, valores que pueden variar. Funcionan todas las reglas aritméticas, solo que algunos números son sustituidos por letras que pueden recibir distintos valores.

Ejemplo: $3x^2 + 4x + 7x - 1$

3.1.1 Suma algebraicas

la suma algebraica es cuando dos o más valores se añaden entre sí. Pueden ser expresiones algebraicas o números, y darán un resultado que dependerá de sus signos. En la suma algebraica se cumple que los términos se agregan entre sí tal cual, respetando los signos.

- Los términos tienen que ser semejantes. Es decir, contener las mismas literales (xy, 2xy, 4xy).
- Los términos semejantes se agrupan para más facilidad.
- La suma se indica poniendo un signo "más" (+) entre los términos $(xy + 2xy + 4xy)$.
- Si un término tiene signo negativo, se encierra en un paréntesis. El paréntesis se acompañará con el signo + de la operación $[xy + (-2xy) + (-4xy)]$.
- Respetando los signos según las **Leyes de los signos**, los términos semejantes se agregan $(xy - 2xy - 4xy = 1xy - 6xy = -5xy)$.
- Si los términos no son semejantes, la suma se queda sólo señalada $(xy + 2m - 4h)$.

Ejemplo

$$\boldsymbol{wx^2y + 3x^2 + (-7wx^2y) + 4x^2 =}$$

Se agrupan los términos semejantes: $wx^2y + (-7wx^2y) + 3x^2 + 4x^2 =$

Se respetan signos negativos: $wx^2y - 7wx^2y + 3x^2 + 4x^2 =$

Resultado: – $\boldsymbol{6wx^2y} + \boldsymbol{7x^2} =$

3.1.2 Resta algebraica

La resta algebraica es una de las operaciones fundamentales en el estudio del álgebra. Sirve para restar monomios y polinomios. Con la resta algebraica sustraemos el valor de una expresión algebraica de otra.

- Ordenamos los polinomios con relación a sus letras y sus grados, respetando el signo de cada término:

$$4a + 3a^2 + 6b – 8b^2$$

$$-3a + 5b + 6b^2 + c =$$

- Agrupamos las restas de los términos comunes, en el orden minuendo–sustraendo: [(4a) –(–3a)] + 3a^2 + [(6b) – (5b)] + [(– 8b^2) – (6b^2)] – c
- Efectuamos las restas de los términos comunes que pusimos entre paréntesis o corchetes. Recordemos que al ser resta, los términos del sustraendo cambian de signo: [4a + 3a] + 3a^2 + [6b – 5b] + [– 8b^2 – 6b^2] – c = 7a + 3a^2 + b – 14b^2 – c

Ejemplo

$$5fg – (– 4fg)$$

$$= 5fg + 4fg$$

$$= \boldsymbol{9fg}$$

Son términos semejantes, pues tienen las literales fg.

El signo – afecta al número negativo y cambia su signo: – (– 4fg) = + 4fg.

Se acumulan los coeficientes (5 + 4 = 9).

3.1.3. Signos de Agrupación (Barra o vinculo, paréntesis, corchetes y llaves)

Para desarrollar las operaciones en algebra hay que seguir un orden, por eso se requieren los signos de agrupación constituidos por paréntesis, conchetes, llaves y vinculo.

Paréntesis ():

Son los signos de agrupación más utilizados. Indican que las operaciones dentro de ellos deben realizarse primero. Por ejemplo, en [5(3+4)], primero se suma (3+4) y luego se multiplica por (5).

Corchetes []:

Se utilizan para agrupar expresiones dentro de los paréntesis. Por ejemplo, en (2*[3 + (4*5)]), primero se multiplica (4*5), luego se suma (3) y finalmente se multiplica por (2).

Llaves { }:

Son el tercer nivel de agrupación. Se usan cuando ya hay paréntesis y corchetes dentro de una expresión. Por ejemplo, en (2{3 + [4(5+6)]}), se sigue el orden de operaciones desde el más interno al más externo.

3.1.4. Multiplicación algebraica

La multiplicación de dos expresiones algebraicas es otra expresión algebraica, en otras palabras, es una operación matemática que consiste en obtener un resultado llamado producto a partir de dos factores algebraicos llamada multiplicando y multiplicador.

Ley conmutativa

Esta ley nos dice que el orden de los factores no altera el producto, esto es, ab=ba, veamos dos ejemplos:

$xy^2=y^2x$

$xyz^2=yxz^2=xz^2y=yz^2x=z^2xy=z^2yx$

Ley asociativa

La ley asociativa nos dice no importa de qué manera se agrupen los factores, esta no altera el producto, esto es, a(bc)=(ab)c, aclarando con un ejemplo:

$xy^2z^3=x(y^2z^3)=y^2(xz^3)=z^3(xy^2)$

Ley distributiva

Como vamos a tratar con multiplicación con polinomios, esta ley será muy importante para nuestras operaciones, y nos dice que la multiplicación de un factor por una suma de dos o más términos es igual a la suma de cada termino multiplicado por el factor dado, esto es, a(b+c)=ab+ac, veamos estos ejemplos:

$3(4+1)=3\cdot4+3\cdot1=12+3=15$

$5(x+3)=5\cdot x+5\cdot3=5x+15$

Estos conceptos serán suficientes para comenzar a desarrollar la sección actual.

Ejemplo

Multiplicar a, $-3a^2b$ y $-ab^3$.

Solución:

$$(a)(-3a^2b)(-ab^3)$$

$$= [(1)(-3)(-1)](a \cdot a^2b \cdot ab^3)$$

$$= (3)(\boldsymbol{a^{1+2+1}b^{1+3}})$$

$$= \boldsymbol{3a^4b^4}$$

3.1.5. División algebraica

La división algebraica es una operación entre dos expresiones algebraicas llamadas dividendo y divisor para obtener otra expresión llamado cociente por medio de un algoritmo.

- **División exacta.**

  Esta división se define cuando el residuo RR es cero, entonces:

$$D = dq + 0 \rightarrow \frac{D}{d} = q$$

D→ $dividendo$ **,** **d**→ $divisor$, **c**→ cociente

- **División inexacta.**

  Esta división se define cuando el residuo R es diferente de cero. De la identidad, dividiendo entre el divisor d, tenemos:

$$\frac{D}{d} = \frac{dq + R}{d} \rightarrow \frac{D}{d} = q + \frac{R}{d}$$

Significa que la división es inexacta ya que existe un término adicional $\frac{D}{d}$.

Ejemplo:

$$\frac{18x^4}{6x^2} = \left(\frac{18}{6}\right)\left(\frac{x^4}{x^2}\right) = 3x^{4-2} = 3x^2$$

$$\frac{14x^{20} + 21x^{16} + 28x^{10}}{7x^8} = \frac{14x^{20}}{7x^8} + \frac{21x^{16}}{7x^8} + \frac{28x^{10}}{7x^8} =$$

$$2x^{20-8} + 3x^{16-8} + 4x^{10-8} = 2x^{12} + 3x^8 + 4x^2$$

Actividades:

Aplicando las propiedades del algebra, resuelve los ejercicios propuestos.

1. $-4x + 7(5x - 2) =$
2. $(9x - 3)(4x - 8) =$
3. $3x(1 - 2x) + 7x(-3x + 9) - 2x =$
4. $1 - 9[5x(4x + 6) + 8x] =$
5. $7x + x[(-6x)(-7x + 1) - 5x + 3] =$
6. $3x[-4x + 7(5x - 2)] - 8x + 12 - [(9x - 3)(4x - 8) - 3x] + 24x =$
7. $7x[3x(1 - 2x) + 7x(-3x + 9) - 2x] + 4x[6x - 5(x + 7)] =$
8. $45x - 8x\{1 - 9[5x(4x + 6) + 8x] =$
9. $-4\{7x + x[(-6x)(-7x + 1) - 5x + 3]\} - 56x + 1 =$
10. $9x - \{3x[-4x + 7(5x - 2)] - 8x + 12\} =$
11. $90 + x\{-[(9x - 3)(4x - 8) - 3x] + 24x\} =$
12. $8x\{7x[3x(1 - 2x) + 7x(-3x + 9) - 2x] + 4x[6x - 5(x + 7)]\} - 4x + 7 =$
13. $12a^4 - 9a^3b^2 + 3a^2b \div 3ab =$
14. $36x^8 + 24x^6 - 12x^4 \div 6x^2 =$

3.2 Ley Exponentes, Radicales, Logaritmos

3.2.1 Leyes de los exponentes

Los exponentes son una forma compacta de expresar la multiplicación repetida de un número por sí mismo. Comprender y utilizar correctamente las leyes de los exponentes es fundamental en álgebra, ya que simplifican muchas operaciones y facilitan la resolución de ecuaciones. Estas leyes son reglas que nos ayudan a manejar y simplificar expresiones con exponentes de manera sistemática.

Definición de exponente

Un exponente se escribe como un número pequeño (superíndice) colocado a la derecha y arriba de una base. Por ejemplo, en a^n,

"a" es la base

"n" es el exponente, lo que significa que

"a" se multiplica por sí mismo "n" veces.

Ejemplo:

$$a^3 = a \times a \times a$$

Principales leyes de los exponentes

Potencia uno: Cualquier número elevado a la potencia de uno es igual a sí mismo.

$$a^1 = a$$

Ejemplos:

$$5^1 = 5$$

$$8^1 = 8$$

Exponente cero: Cualquier número distinto de cero elevado a la potencia de cero es igual a uno.

$$a^0 = 1$$

Ejemplos:

$$10^0 = 1$$

$$8^0 = 1$$

Exponente negativo: Un exponente negativo indica el reciproco de la base elevada al exponente positivo.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ejemplos:

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2}$$

$$6^{-3} = \frac{1}{6^3}$$

Potencia negativa de una fracción: Elevar una fracción a una potencia negativa implica tomar el reciproco de la fracción y elevarlo al exponente positivo correspondiente.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Ejemplos:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\left(\frac{5}{7}\right)^{-3} = \left(\frac{7}{5}\right)^3$$

Producto de potencias con la misma base: Cuando se multiplican dos potencias que tienen la misma base, se suman los exponentes.

$$(a^m)(a^n) = a^{m+n}$$

Ejemplos:

$$(2^3)(2^4) = 2^{3+4} = 2^7$$

$$(10^5)(10^3) = 10^{5+3} = 10^8$$

Cociente de potencias con la misma base: Cuando se dividen dos potencias que tienen la misma base, se restan los exponentes.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Ejemplos:

$$\frac{5^6}{5^2} = 5^{6-2} = 5^4$$

$$\frac{7^9}{7^3} = 7^{9-3} = 7^6$$

Potencia de una potencia: Cuando se eleva una potencia a otro exponente, se multiplican los exponentes.

$$(a^m)^n = a^{m\times n}$$

Ejemplos:

$$(3^2)^4 = 3^{2\times 4} = 3^8$$

$$(6^3)^3 = 6^{3\times 3} = 6^9$$

Potencia de un producto: Cuando se tiene un producto elevado a un exponente, se aplica el exponente a cada factor del producto.

$$(ab)^n = (a^n)(b^n)$$

Ejemplos:

$$(2\times 3)^4 = 2^4 \times 3^4$$

$$(5\times 6)^2 = 5^2 \times 6^2$$

Potencia de un cociente: Cuando se tiene un cociente elevado a un exponente, se aplica el exponente al numerador y al denominador.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejemplos:

$$\left(\frac{4}{2}\right)^3 = \frac{4^3}{2^3}$$

$$\left(\frac{7}{3}\right)^4 = \frac{7^4}{3^4}$$

Actividades: Aplicando las leyes de exponentes resuelve los siguientes ejercicios

1. $2^0 =$
2. $15^0 =$
3. $10^1 =$
4. $15^1 =$
5. $2^3 . 2^3 =$
6. $a^{15} . a^0 =$
7. $4^b . 4^c =$
8. $b^3 \div b^4 =$
9. $x^{23} / x^{13} =$
10. $(2 \times 3)^3 =$
11. $(3ab)^2 =$
12. $(a^3)^3 =$
13. $\left(\frac{a^3}{b^6}\right)^4 =$
14. $(10x^4)^{-2}y^{-1} =$
15. $(x^{-3}z)^2 \times (x^2z^3)^{-3} =$
16. $\frac{x^{-4}y^2}{x^2y^{-3}} =$

3.2.3 Leyes de las radicales

Las leyes de los radicales son reglas matemáticas que nos permiten simplificar y manipular expresiones que involucran raíces, tales como la raíz cuadrada, la raíz cúbica, entre otras. Estas leyes son fundamentales en álgebra y análisis matemático, facilitando la resolución de ecuaciones y la simplificación de expresiones complejas.

Definición de radical

Una radical se representa como

$$\sqrt[n]{a} =$$

donde

"n" es el índice del radical

"a" es el radicando.

La expresión $\sqrt[n]{a}$ se lee como "la raíz n-ésima de a". Cuando el índice no se especifica, se asume que es 2, lo que se conoce como la raíz cuadrada.

Producto de radicales con el mismo índice: La raíz n-ésima del producto de dos números es igual al producto de las raíces n-ésimas de esos números.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$

Ejemplos:

$$\sqrt{900} = \sqrt{(9)(100)} = \sqrt{9}\sqrt{100} = (3)(10) = 30$$

Cociente de radicales con el mismo índice: La raíz n-ésima del cociente de dos números es igual al cociente de las raíces n-ésimas de esos números.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Ejemplos:

$$\sqrt{\frac{18}{2}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = 3$$

Potencia de una radical: La raíz n-ésima de un número elevado a la potencia

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^{m} = \sqrt[n]{a^{m}}$$

es igual a ese número elevado a la fracción

$$a^{\frac{m}{n}}$$

Ejemplos:

$$\sqrt[6]{2^{3}} =$$

Radical de una radical: La raíz n-ésima de la raíz m-ésima de un número es igual a la raíz de ese número.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\times m]{a}$$

Ejemplos:

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}} = \sqrt[24]{2}$$

Actividades. Aplicando leyes de los radicales resuelve los siguientes ejercicios propuestos.

1. $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$
2. $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^2}}$
3. $\frac{\sqrt[3]{8a^3b}}{\sqrt[4]{4a^2}}$
4. $\sqrt{18a^5}$
5. $\sqrt{44a^3b^7c^9}$

3.3 Leyes de los logaritmos

Los logaritmos son herramientas matemáticas que se utilizan para resolver ecuaciones exponenciales y para simplificar la multiplicación, división y potenciación de números grandes. Las leyes de los logaritmos son reglas fundamentales que permiten manipular y simplificar expresiones logarítmicas. Comprender estas leyes es esencial en el estudio del álgebra, el cálculo y otras áreas de las matemáticas.

Definición de logaritmo

El logaritmo de un número es el exponente al cual se debe elevar una base específica para obtener ese número.

Se denota como

$$\log_b a = c$$

donde:

b es la base del logaritmo

a es el argumento del logaritmo

$\log_b a = c$ significa que el logaritmo con base a b de a es igual.

Ejemplos:

$$\log_2 8 = 3$$

$$\log_4 16 = 2$$

$porque$ 2^4=16

Logaritmo del producto: El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

$$\log_b x.y = \log_b x + \log_b y$$

Ejemplos:

$$\log_2 8 + \log_2 4 = \log_2(8 \times 4)$$

$$\log_2 32$$

Logaritmos del cociente: El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos del numerador y el denominador.

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

Ejemplos:

$$\log_3 \frac{27}{3} = \log_3 27 - \log_3 3 = 3 - 1 = 2$$

$$\log_2 \frac{32}{8} = \log_2 32 - \log_2 8 = 5 - 3 = 2$$

Logaritmo de una potencia: El logaritmo de una potencia es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base de la potencia.

$$\log_b x^n = n \log_n x$$

Ejemplos:

$$\log_5 25^2 = 2 \log_5 25 = (2)(2) = 4$$

$$\log_2 8^3 = 3 \log_2 8 = (3)(3) = 9$$

Logaritmo de 1: El logaritmo de 1 en cualquier base es siempre 0.

$$\log_b 1 = 0$$

Ejemplos:

$$\log_7 1 = 0$$

$$\log_9 1 = 0$$

Logaritmo de la base: El logaritmo de una base $\log_b b = 1,$ en sí misma es siempre 1.

Ejemplos:

$$\log_4 4 = 1$$

$$\log_7 7 = 1$$

Actividades: Resuelve los siguientes ejercicios de las leyes de exponentes.

1. $\log_2(8 \times 4)$=
2. $\log_3(27 \times 3) =$
3. $\log_3(81 \times 9) =$
4. $\log_4(64 \times 16) =$
5. $\log_2(32 \times 4) =$
6. $\log_5(25 \times 3) =$
7. $\log_3(9^3) =$
8. $\log_5(25^4) =$
9. $\log_2(32) =$
10. $\log_7(49) =$

3.4. Agrupación de Términos en Común

El **factor común por agrupación de términos** es un procedimiento algebraico que permite escribir algunas expresiones algebraicas en forma de factores. Para lograr este objetivo, primero hay que agrupar convenientemente la expresión y observar que cada grupo así formado tenga, en efecto, un factor común.

Por ejemplo, supongamos que se necesita factorizar la siguiente expresión:

$$2x^2 + 2xy - 3zx - 3zy$$

Esta expresión algebraica consta de 4 monomios o términos, separados por signos + y −, a saber:

$2x^2$, $2xy$, $-3zx$, $-3zy$

Observando con detenimiento, la x es común a los tres primeros, pero no al último, mientras que la y es común al segundo y al cuarto, y la z es común al tercero y al cuarto.

Así que en principio no existe un factor común a los cuatro términos a la vez, pero si se agrupan como se va a mostrar en el apartado siguiente, es posible que sí aparezca uno que ayude a escribir la expresión como el producto de dos o más factores.

Ejemplo

Factorizar la expresión: $2x^2 + 2xy - 3zx - 3zy$

Paso 1: **Agrupar**

$2x^2 + 2xy - 3zx - 3zy = (2x^2 + 2xy) + (-3zx - 3zy)$

Paso 2: Sacar el factor común de cada grupo

$2x^2 + 2xy - 3zx - 3zy =$

$(2x^2 + 2xy) - (3zx + 3zy) =$

Nota: El factor común es 2x y 3z

$2x(x+y)-3z(x+y)$

3.5. Productos y Cocientes Notables

En álgebra, los productos y cocientes notables son expresiones algebraicas que siguen patrones específicos y predecibles. Estos patrones permiten simplificar el trabajo con polinomios y facilitan la factorización y la expansión de expresiones algebraicas. Conocer y aplicar estos productos y cocientes notables es esencial para resolver ecuaciones y simplificar expresiones de manera eficiente.

Definición: Los productos notables se obtienen con un simple desarrollo, sin necesidad de efectuar el producto.

Cuadrado de un binomio: El desarrollo de la suma de dos cantidades al cuadrado es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primer término por el segundo, más el cuadrado del segundo.

La fórmula para el cuadrado de un binomio es:

$$(a+b)^2=$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

Y para el cuadrado de la diferencia de un binomio

$$(a-b)^2=$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

Ejemplos:

$(x+7)^2=(x)^2+2(x)(7)+(7)^2=x^2+14x+49$

Cuadrado de un trinomio: El desarrollo de la expresión

$(a+b+c)^2=$

es igual a la suma de los cuadrados de cada uno de los términos, más los dobles productos de las combinaciones entre ellos.

La fórmula para el cuadrado de un trinomio es:

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

Ejemplos:

$(x+2y+3z)^2=(x)^2+(2y)^2+(3z)^2+2(x)(2y)+2(x)(3z)+2(2y)(3z)$

$=x^2+4y^2+9x^2+4xy+6xz+12yz$

Binomios conjugados: Son de la forma

$$(a+b)(a-b)=$$

y su resultado es la diferencia de los cuadrados de ambas cantidades.

La fórmula para los binomios conjugados.

$$(a+b)(a-b)=$$

es:

$$(a+b)(a-b)= a^2-ba+ba-b^2=a^2-b^2$$

Ejemplos:

$$(x+6)(x-6)=x^2-6x+6x-36=x^2-36$$

Binomios con término común: Son de la forma

$$(x+a)(x+b)=$$

, su resultado es un trinomio cuyo desarrollo es el cuadrado del término común, más la suma de los términos no comunes por el término común, mas el producto de los no comunes.

$$(x+\mathrm{a})(x+b)= \mathrm{x}^2+(a+b)x+ab$$

Ejemplos:

$$(x-6)(x+4)=x^2+(-6+4)(x)+(-6)(4)=x^2-2x-24$$

Cubo de un binomio: Es de la forma $(a+b)^3$, su desarrollo es un polinomio de cuatro términos al que se llama cubo perfecto y su desarrollo es el cubo del primer término, más el triple producto del cuadrado del primero por el segundo, más el triple producto del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo.

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Ejemplos:

2. $(m+5)^3=(m)^3+3(m)^2(5)+3(m)(5)^2+(5)^3=m^3+15m^2+75m+125$

Actividades. Resuelve los ejercicios de productos notables

a) $(x+8)^2=$

b) $(m-10)^2=$

c) $(x+2y+3z)^2=$

d) $(3x-2y+1)^2=$

e) $(a+6b-5c)^2=$

f) $(x+3)(x-3)=$

g) $(k-8)(k+8)=$

h) $(x-8)(x+5)=$

i) $(x+3)(x+6)=$

j) $(m+6)3=$

3.6. Factorización algebraica

La factorización algebraica es el proceso de descomponer una expresión algebraica en el producto de expresiones más simples, llamadas factores. Este proceso es esencial en álgebra porque simplifica las ecuaciones y facilita su resolución. A continuación, se presentan algunos métodos comunes de factorización:

Factor común: Es aquel factor que divide a todos los términos de un polinomio. Para localizar el factor común se aplica la propiedad distributiva a (b + c) = ab + ac, donde a es el factor común. Se localiza el factor común, el cual se forma con el número que divide exactamente a los coeficientes de cada término acompañado de la letra(s) que están en cada término de la expresión a factorizar elevadas a la menor potencia y se aplica en cierta forma la propiedad distributiva en forma inversa; por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
2ax^2 + 3bx^3 &= x^2(2a + 3bx) \\
a^4b - 5ac &= a\,(a^3b - 5c) \\
4a^5b + 4a^3c &= 4a^3(a^2b + c)
\end{aligned}
$$

Diferencia de cuadrados: La diferencia de cuadrados es una expresión algebraica de la forma $a^2 - b^2$, donde a y b son términos que pueden ser variables, constantes o combinaciones de ambos elevados al cuadrado. La clave para identificar una diferencia de cuadrados radica en reconocer la estructura de resta de dos términos que están elevados al cuadrado. La fórmula de la diferencia de cuadrados es $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Esto implica que, para factorizar una diferencia de cuadrados, se extraen las raíces cuadradas de los términos y se forma un binomio. Finalmente se expresa el producto de este binomio por su conjugado. Por ejemplo:

$9y^4x^2 - x^2$ car raíces de ambos términos: $\sqrt{9y^4x^2} = 3y^2x$ $\sqrt{x^2} = x$ licar la formula (a + b) (a - b) $9y^4x^2 - x^2 = 3y^2x - x$	$16m^6 - 9n^4$ Sacar las raíces de ambos términos $\sqrt{16m^6} = 4m^3$ $\sqrt{9n^4} = 3n^2$ licar la formula (a + b) (a - b) $16m^6 - 9n^4 = (4m^3 + 3n^2)(4m^3 - 3n^2)$

Trinomio al cuadrado perfecto. Un trinomio cuadrado perfecto (TCP) es una expresión algebraica de tres términos en el cual, dos de ellos son cuadrados perfectos y el otro término es el doble producto de las bases de esos cuadrados. La regla dice que, para ser un trinomio cuadrado perfecto, es necesario que en el polinomio el primer y tercer término sean positivos y cuadrados perfectos (es decir que tengan raíz cuadrada exacta), mientras que el segundo término sea el resultado del doble producto de las raíces cuadradas de los extremos. Por ejemplo:

$\mathbf{25x^4 + 30x^2y^3 + 9y^6}$ $\mathbf{\overline{25x^4} = 5x^2}$ $\mathbf{\sqrt[2]{9y^6} = 3y^3}$ $\mathbf{2(5x^2)(3y^3) = 30x^2y^3}$ tal manera que se cumple la regla y se puede resar como: $\mathbf{(5x^2+3y^3)^2}$	$\mathbf{121v^{12} - 154v^6wx^5 + 49w^2x^{10}}$ $\mathbf{\sqrt{121v^{12}} = 11v^6}$ $\mathbf{\sqrt[2]{49w^2x^{10}} = 7wx^5}$ $\mathbf{2(11v^6)(7wx^5) = 154v^6wx^5}$ De tal manera que se cumple la regla y se puede expresar como: $\mathbf{(11v^6 - 7wx^5)^2}$

Trinomio de la forma $\boldsymbol{x^2 + bx + c}$. Un trinomio de esta forma es un polinomio cuadrático compuesto por tres términos, donde el primer término es un cuadrado perfecto de , el segundo término es una variable lineal acompañada de un coeficiente (b) llamado coeficiente lineal y el tercer término es una constante independiente (c). Este trinomio es el resultado del producto notable de dos binomios con un término común. Para resolver la factorización se debe hallar dos números cuyo producto sea igual al término independiente (c) y cuya suma sea el valor del coeficiente del segundo término (b); posteriormente se calcula la raíz cuadrada del primer término; se escriben dos pares de paréntesis, en ambos se refleja el resultado de la raíz cuadrada y por último se escribe en cada paréntesis los números obtenidos en el paso 1; un valor por paréntesis, separados por el signo correspondiente para que conforme el valor del segundo término. Esto es, $x^2 + bx + c = (x + p)(x + q), tal\ que\ (p + q) = b\ y\ (p.q) = c$. Por ejemplo:

$$x^2 - 11x + 10 = (x - 10)(x - 1) \rightarrow \boxed{\begin{array}{c} -10 - 1 = -11 \\ (-10)(-1) = 10 \end{array}}$$

$$x^2 - 12x - 45 = (x - 15)(x + 3) \rightarrow \boxed{\begin{array}{c} -15 + 3 = -12 \\ (-15)(3) = -45 \end{array}}$$

$$x^2 + 15x + 14 = (x + 14)(x + 1) \rightarrow \boxed{\begin{array}{c} 14 + 1 = 15 \\ (14)(1) = 14 \end{array}}$$

$$x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2) \rightarrow \boxed{\begin{array}{c} 3 - 2 = 1 \\ (3)(-2) = -6 \end{array}}$$

Trinomio de la forma $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$. Un trinomio de esta forma es una expresión algebraica que consta de tres términos, donde a, b y c son coeficientes constantes y x es una variable. Para este tipo de trinomio el coeficiente de la variable al cuadrado (a) presenta un valor diferente a 1 y la raíz cuadrada del primer término y del tercero no son exactas. Un método para su solución consiste en descomponer en factores los extremos y la suma de los productos debe ser igual al término central; además los factores se toman de forma horizontal. Por ejemplo:

Ejemplo 1.

Factorizar: $\mathbf{F(x) = 10x^3 - 3 - 13x}$

RESOLUCIÓN :

Ordenando el polinomio y descomponiendo los términos extremos de dicho polinomio, tenemos: $\mathbf{10x^2 - 13x - 3}$

$$\begin{array}{lcrcr} 5x & & 1 & = & 2x \\ 2x & & -3 & = & -15x \\ \hline & & & & -13x \end{array}$$

$$\Rightarrow \mathbf{F(x) = (5x+1)(2x-3)}$$

Ejemplo 2

Factorizar: $\mathbf{A(x) = 15x^2 - 8xy - 12y^2}$

RESOLUCIÓN:

Descomponiendo los términos extremos del polinomio: $\mathbf{15x^2 - 8xy - 12y^2}$

$$\begin{array}{lcrcr} 3x & & 2y & = & 10xy \\ 5x & & -6y & = & -18xy \\ \hline & & & & -8xy \end{array}$$

$$\Rightarrow \mathbf{A(x) = (3x+2y)(5x-6y)}$$

Conclusión

Podemos concluir que el conocimiento matemático, es fundamental para toda área de ingeniería. Esto proporciona un lenguaje universal que permite expresar conceptos y leyes físicas, permite simular o predecir comportamientos de sistemas complejos. Además de emplear para realizar mejoras mediante técnicas matemáticas; en otras palabras, nos permite pensar y abordar problemas de manera sistemática.

Bibliografía

Baldor, A. (2008). *Álgebra de Baldor (2 ed.)*. México: Patría.

Sánchez Hernández, R. (2015). Álgebra: (ed.). Grupo Editorial Patria. https://elibro.net/es/lc/cerroazul/titulos/40393